SÉRIE VIII. — TOME VIII. N° 8. AOÛT 1947.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

CRITÉRIUM DE SENSIBILITÉ DES JETS GAZEUX ET DES FLAMMES AUX ONDES SONORES

Par Z. CARRIÈRE.

Professeur à l'Institut Catholique de Toulouse. Maître de Recherches.

Sommaire. — La condition de Rayleigh qui fait prévoir l'instabilité du mouvement laminaire d'un fluide quelconque, jointe à l'identification des vitesses d'écoulement et de propagation, identification que permet, comme solution singulière, l'équation différentielle la plus générale du mouvement des liquides visqueux, explique parfaitement ce qu'on sait des flammes sensibles et des jets sensibles connus.

On cherche à expliquer de même la sensibilité ici signalée pour la première fois, de flammes petites et même très petites de gaz très éclairants comme l'acétylène. L'insensibilité de la flamme d'une bougie pose un problème dont la solution a donné lieu à des observations passablement paradoxales.

Un cas non moins paradoxal, la sensibilité d'un très vieux manchon Auer, s'explique assez facilement par la théorie.

On donne le schéma d'un viseur facilitant la mesure des interfranges des flammes sensibles.

1. Résultats expérimentaux acquis. — Dans la *Revue d'Acoustique* pour 1934, j'ai longuement décrit et représenté les formes principales des flammes sensibles aux ondes sonores. J'ai montré qu'en les utilisant pour régler un stroboscope attelé à un compte-tours qui commande lui-même la mise en route et l'arrêt d'un compte-secondes, la fréquence des ondes sonores incidentes pouvait être mesurée au millième près. Je n'ai pas parlé de jets d'air stratifiés pour lesquels je n'avais à cette date qu'un petit nombre d'observations considérées comme réussites accidentelles.

En 1941, Andrade complétait cette lacune en publiant de nombreux clichés représentant non seulement des flammes, mais des jets d'air enfumé et même des jets d'eau dans l'eau superbement stratifiés par le son.

Il devenait évident que les flammes n'étaient qu'un cas particulier d'un système plus général comprenant les fluides de nature quelconque. Le privilège des flammes consiste en ce qu'elles manifestent généralement leur sensibilité par des variations locales de brillance ou de teinte, variations qui constituent les strates ou franges bien connues. Pour expérimenter avec d'autres fluides, il suffira de trouver et d'associer à chacun d'eux un révélateur capable de déceler au stroboscope des variations locales instantanées analogues.

Je dis au stroboscope, pour exclure de ma perspective actuelle toutes les modifications du contour d'un jet où ne se manifeste aucun indice de la période des ondes sonores incidentes. Qu'un jet fumeux long et effilé s'enfle localement sous une incidence sonore n'est pas objet de mon étude actuelle si je n'arrive pas à trouver en quelqu'une de ses parties une périodicité spatiale de nature quelconque, sur laquelle je puisse régler à l'isochronisme mon stroboscope. Tyndall parle de flammes qui, hautes de 40 cm, s'affaissent en forme de chou-fleur couronnant un pied de 20 cm seulement, sous l'impact d'un son de sifflet très aigu. C'est un cas indubitable de sensibilité et de grande sensibilité; il échappe à mon contrôle tant que je n'ai pas trouvé quelque part, vers l'insertion du chou-fleur sur son pied ou ailleurs, une variation périodique du contour apparent ou de la luminosité sur laquelle je puisse régler mon stroboscope à la fréquence de l'onde incidente.

Toutes les sensibilités dont je fais état ont été contrôlées au stroboscope à fentes. Andrade le remplace par un cinématographe rapide.

Le stroboscope n'est pas d'ailleurs nécessairement

le disque à fentes ordinaire. Il pourrait être remplacé par un miroir tournant ou par la bande de papier à enfumer de Mach, par des électrodes reliées à un microphone pour lequel le jet sensible sert de modulateur [1], ou par un indicateur quelconque de périodicité.

2. Théorie de Tollmien. Critérium de Rayleigh. — Tollmien [2] suppose le fluide quelconque soumis aux ondes sonores en train de s'écouler sous forme de nappe laminaire d'épaisseur uniforme AB (*fig.* 1), limitée par deux plans parallèles AC, DB sur lesquels la vitesse est nulle s'ils sont des faces de solides. La nappe est indéfinie; l'écoulement est normal au plan de la figure 1 où est tracée une courbe représentant la vitesse des différentes tranches d'épaisseur dy en lesquelles le système peut être décomposé. J'appellerai cette courbe diagramme, évitant le terme de « profil » employé par l'auteur, à cause de la confusion que pourrait engendrer cette expression dans une étude où les contours apparents des jets appelés quelquefois profils jouent un rôle très important.

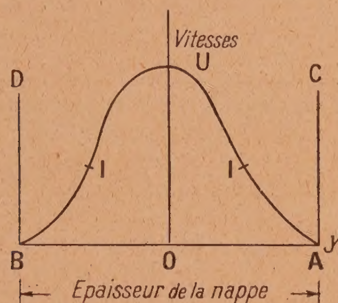


Fig. 1.

Dans une telle nappe, longtemps avant Tollmien Rayleigh [3] avait signalé comme instables les couches pour lesquelles le diagramme possède un point d'inflexion. Attelé au problème de la turbulence, cet auteur était satisfait de définir ainsi l'instabilité du mouvement d'un fluide dont les lignes de courant peuvent être modifiées par les plus petites perturbations, non périodiques d'ailleurs.

Tollmien envisage des perturbations périodiques. Il étudie mathématiquement l'existence possible d'oscillations à amplitude constante et même d'oscillations susceptibles de s'emballer. A titre d'exemple, il donne les expressions algébriques de quelques diagrammes à partir desquelles il calcule, comme propres, les valeurs de l'amortissement et de la vitesse de propagation aux divers points du fluide voisins de ceux qui vérifient la condition d'instabilité.

Nulle mention de l'application possible de la théorie aux flammes sensibles, ni à un phénomène expérimental quelconque.

Cette application est immédiate.

3. Vitesse des strates et vitesse d'écoulement. — Avec Tollmien, appelons $\psi(x, y, t)$ la perturbation sonore horizontale frappant normalement la nappe plane gazeuse dont la vitesse u verticale est définie par le diagramme $u = f(y)$; Ox est vertical parallèle à u; Oy est normal à la nappe et à u, parallèle à ψ.

Les équations générales de l'hydrodynamique, compte tenu de la viscosité η, s'écrivent

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + u\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi - \frac{d^2u}{dx^2}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \eta\,\Delta\Delta\psi.$$

Posant

$$\psi = \varphi(y)\,e^{i(\alpha x - \beta t)},$$

On obtient

$$(u - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - u''\varphi = -\frac{i}{\alpha R}[\varphi^{\text{IV}} - \alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi].$$

c, est la vitesse de déplacement de la perturbation;
α, est le coefficient d'amortissement;
R, est le nombre de Reynolds.

Pour R grand, on a la solution singulière

$$u'' = O,$$
$$u = c$$

qui explique parfaitement les principales caractéristiques des flammes sensibles.

$u'' = 0$ est la condition d'instabilité de Rayleigh;

$u = c$ définit la vitesse de déplacement de la perturbation dans le fluide instable. Il s'agit d'un déplacement et non d'une propagation. Il n'y a pas de propagation. La perturbation serait vue fixe par un observateur ayant la même vitesse que le fluide.

La théorie suppose la vitesse uniforme et constante dans chaque tranche, variable seulement d'une tranche à la voisine : un diagramme unique définit toutes les vitesses de la nappe indéfinie.

Dans un fluide réel, en particulier dans une nappe gazeuse incandescente, un tel régime est inadmissible. Les vitesses ne sont qu'approximativement parallèles; la détente inévitable les étale progressivement dans un angle solide petit mais non nul; la même détente réduit de même progressivement la valeur numérique de la vitesse, réduction à laquelle s'ajoute celle due à l'entraînement par viscosité de l'atmosphère ambiante. La théorie du mouvement laminaire n'est donc applicable qu'à des plages de cette nappe relativement restreintes. Il faut tracer non pas un mais de nombreux diagrammes dont les courbes ne sont généralement pas déductibles les unes des autres par translation ou dilatation de coordonnées.

La flamme est sensible si, pour *une* de ces plages, le diagramme possède un point d'inflexion.

[1] Z. Carrière, *Revue d'acoustique*, 1938, p. 24-36.
[2] *Nachrichten Z. G. der Wiss. gottingen*, Bd I, 1934-1940.
[3] *Scientific papers*, 1880, **I**, p. 474; 1887, **III**, p. 17; 1895, **IV**, p. 203; 1913, **VI**, p. 197.

Sur cette plage et sur cette plage seulement agit l'onde sonore incidente. C'est la plage *sensible; seule elle est absorbante pour l'énergie sonore.*

L'onde sonore y modifie les lignes de courant au rythme et à un taux déterminé par la fréquence et l'amplitude de l'onde incidente. Cette modification se déplace dans le courant avec la vitesse même du courant $u = c$. Elle est visible sous la forme de strates ou franges qui correspondent généralement à des variations de couleur et à une ondulation de la surface qui sépare la flamme de l'atmosphère. La phase de la strate *qui va sortir* de la plage sensible est une résultante de toutes les perturbations subies par le fluide qui sort de cette plage pendant qu'il parcourait la dite plage.

Une fois sortie de la plage sensible, la strate monte, avec la vitesse du fluide qui l'entraîne, parfaitement indifférente aux ondes sonores parce que *le diagramme des plages alors traversées n'a pas de point d'inflexion.*

Hors de la plage sensible, les strates représentent non pas une perturbation, mais un état du fluide en mouvement, état défini par une couleur et éventuellement par un décalage relatif des couches horizontales d'où résulte l'ondulation de la nappe moyennement verticale. Hors de la plage sensible, ce décalage relatif reste ce qu'il était à la sortie de cette plage. Hors de la plage sensible, les lignes de courant sont parfaitement rectilignes.

4. **Localisation de la plage sensible.** — On sait que les flammes plates manifestent au maximum leur sensibilité quand elles sont au ventre d'une onde stationnaire et quand le vecteur déplacement sonore est normal à leur surface plane. Il s'agit d'un maximum de netteté ou de visibilité, les autres caractéristiques restant invariables; en particulier, l'équidistance des strates ne dépend aucunement de l'obliquité du vecteur champ sonore par rapport à la nappe.

Si la nappe entière était sensible, tous ses points seraient au même instant frappés par l'onde sonore supposée exactement normale, exactement avec la même phase; il n'y aurait pas de strates du tout; si l'on veut, leur équidistance serait infinie. En localisant la sensibilité dans une plage limitée, la condition de Rayleigh permet d'échapper à cette conclusion.

5. **Nombre de Reynolds.** — La solution de Tollmien suppose grand le nombre de Reynolds R

$$R = \rho UD : \eta,$$

où D mesure l'épaisseur de la nappe, ρ la densité du fluide, U la vitesse moyenne, η sa viscosité.

Condition connue longtemps avant Tollmien, mais qui n'est pas condition suffisante et dont la nécessité me paraît douteuse après les expériences dont j'ai à parler.

La condition n'est pas suffisante parce que la vitesse ne doit pas être augmentée indéfiniment. Toujours, pour une vitesse élevée, on atteint le régime turbulent que les ondes sonores les plus intenses n'arrivent pas à discipliner. Une double inégalité doit exister :

$$U_1 < U < U_2.$$

Resterait d'ailleurs à exprimer la dépendance des deux vitesses limites U_1 et U_2 de la fréquence, de la nature du fluide, etc.

Je dirai tout à l'heure pourquoi la limite inférieure U_1 me paraît aujourd'hui douteuse ou, si l'on veut, singulièrement voisine de zéro.

6. **Amortissement des ondes de sensibilité.** — Tollmien distingue les onde non amorties, les ondes. qui s'amortissent et les ondes qui s'emballent Distinction opportune parce qu'elle groupe un grand nombre de phénomènes jusqu'ici inexpliqués.

Parmi les ondes non amorties, sont à compter la plupart des franges de flammes ou de jets enfumés décrites par les divers auteurs.

Parmi les ondes qui s'amortissent, semblent à classer les franges visibles dans la plage sensible, mais non à toute hauteur au-dessus. J'en ai donné des exemples dans la *Revue d'Acoustique* pour 1934, planches I, XIX, XX. Ils se rapportent tous à des ondes de fréquence élevée. L'onde de sensibilité s'établit normalement dans la plage sensible mais son amplitude tombe à zéro après quelques périodes.

On doit considérer comme s'amplifiant et s'emballant les ondes qui dégénèrent en enroulements plus ou moins développés, la progression des spires vers le pôle se continuant ou non, hors de la plage sensible. La houle qui déferle n'est plus la houle, mais elle signale au rivage l'arrivée de la houle régulière. Les jets d'air enfumé ([4]) fournissent des exemples de cet emballement d'où résulte, à peu de distance de la plage sensible, un régime turbulent caractéristique. L'existence d'une zone critique sensible reste décelée par la présence, tout près du sommet du cône turbulent, de deux ou trois amorces d'enroulements sur lesquels il est possible et facile de régler le stroboscope. L'onde qui doit s'emballer passe, au cours des deux ou trois périodes qui précèdent l'emballement, par des formes quasi périodiques observables.

On obtient même ces deux ou trois amorces lorsque déjà, avant tout impact d'onde sonore, il y avait un cône turbulent. La turbulence résulte d'une sensibilité exaltée qui fait obéir le jet aux impulsions les plus diverses et les plus insignifiantes. Sur toutes les impulsions incoordonnées, la perturbation sonore a l'avantage de la périodicité, avantage qui se traduit par des déformations locales pério-

([4]) ANDRADE, *Proced. Phys. Soc.*, 1941, pl. 11.

diques du contour apparent, au moins près du sommet du cône turbulent.

La stroboscopie n'est tenue en échec que pour des turbulences fortement accusées. La limite supérieure des vitesses admissibles est sensiblement plus élevée que celle qui correspond à la naissance de la turbulence.

Je n'ai pas réussi à obtenir des flammes de Tyndall que le son abat et amène à la forme de chou-fleur surmontant un fût cylindrique et effilé. Il s'agit là manifestement d'ondes qui s'emballent. On peut espérer y trouver quelque part, à l'insertion du chou-fleur sur son pied, quelque enroulement conservant la trace de la période de l'onde incidente.

Certaines flammes, longues et fusiformes, sous l'impact sonore, augmentent de diamètre sans cesser d'être fusiformes, mais ne présentent aucune stratification visible. D'autres, sous la même influence et sans montrer aucune frange, s'étalent en queue d'aronde. Il semble qu'il s'agit là d'une insuffisance de vitesse faisant prévoir, si l'on peut l'augmenter, une bonne sensibilité. En tout cas, la perturbation sonore obtient quelque effet. Il est permis de dire qu'on a affaire à une onde induite très amortie.

7. Nature du gaz combustible. — Désirant, en 1943, obtenir avec des flammes sensibles, des spectrogrammes instantanés, je fis quelques essais avec des ajutages dont j'étais, dix ans auparavant, particulièrement satisfait. Je n'eus que des insuccès ! Le gaz livré aux Toulousains contenait principalement du méthane naturel amené de Saint-Gaudens par pipe-line. Il ne supportait pas les vitesses élevées qui sont, nous l'avons vu, une condition principale de sensibilité. Flammes nues et bunsens s'éteignaient dès que le débit par millimètre carré d'orifice dépassait une valeur peu élevée. On dit alors que la vitesse de propagation de la flamme est inférieure à la vitesse d'écoulement du gaz.

En 1947, le même gaz, qui a subi une transformation partielle par cracking, possède une vitesse de propagation de flamme plus élevée et supporte des débits assez importants. Il donne des franges, mais faiblement contrastées et à peu près exclusivement localisées dans les plages blanches supérieure et latérale (nappes incandescentes étalées par fente réduite). Dans la partie médiane obscure, je n'ai jamais obtenu cette plage bleue barrée de franges qui localisait bien, en 1934, l'apparition de l'onde de sensibilité. Le cracking élève notablement la proportion d'hydrogène dans le gaz de ville; la dilution avec de l'air atmosphérique donne aux flammes, en l'absence de tout système artificiel d'aération, l'aspect pâle et bleuté sur lequel l'onde sonore semble sans effet immédiat visible. Je dis *immédiat visible* : l'effet doit exister puisqu'on en aperçoit la suite caractéristique, l'onde de sensibilité voyageant dans les zones plus blanches, vraisemblablement un peu éloignées de son lieu d'origine.

Faisons passer le gaz sur un tampon imbibé de benzine. Le contraste des franges augmente notablement; on en aperçoit deux ou trois au sein de la plage obscure; elles sont d'ailleurs fortement courbées vers le bas montrant que leur centre origine est bien localisé quelque part vers le tiers inférieur et sur la médiane verticale de la nappe incandescente.

Mes insuccès ont appelé mon attention sur l'influence de la nature du gaz combustible et m'ont conduit à réserver pour ces essais une bouteille de méthane naturel (92 p. 100 de CH^4).

Peut-être l'influence de la nature des gaz se réduit-elle à deux chefs principaux faciles à expliquer.

Le premier chef est la faible vitesse de propagation de la flamme dans le méthane naturel qui empêche d'étaler les flammes en éventail par fente réduite [5] *fine*. Il est possible cependant d'obtenir ces nappes avec des fentes de plusieurs millimètres de largeur. Elles sont d'ailleurs sensibles, mais de volume énorme et peu maniables.

Le deuxième chef se rapporte à la définition du phénomène périodique spatial appelé frange ou strate. Au stroboscope, une frange se distingue des plages voisines par sa luminosité qui comprend, soit une variation d'intensité, soit une variation de couleur (spectre d'émission) et par les variations du contour apparent. J'ai trouvé dans le gaz de ville toulousain de 1934, les deux facteurs de luminosité variable dont le second seul semble subsister en 1947, très atténué d'ailleurs.

Le méthane naturel donne des franges d'intensité, peu contrastées d'ailleurs par suite de la médiocre luminosité des plages blanches.

Le butane a sur le méthane l'avantage d'un blanc plus saturé : les franges y sont plus contrastées.

Je n'ai pas réussi à obtenir des franges de *luminosité* avec l'acétylène, même étalé en nappes analogues à celles que fournissent les becs du commerce. Faut-il en chercher la cause dans le blanc très saturé qui caractérise ces flammes ? Insuccès d'autant plus décevant qu'on trouve une sensibilité extrême pour les petites flammes du même gaz brûlant tranquillement sur un orifice de petit diamètre (*voir* ci-après § 8). Il est vrai que l'onde de sensibilité y est décelée par la variation du contour apparent, variation que décèle très efficacement la couleur très blanche du gaz incandescent.

Vues par la tranche, les flammes plates sensibles, telles les flammes de Villari, se présentent avec des ondulations; sont ondulées les flammes plates sensibles que j'obtiens avec des fentes réduites. Il est possible de régler le stroboscope en fixant apparemment ces ondulations. Le réglage ne va cependant pas sans difficultés par suite de la courbure des strates qui sont généralement concaves vers le bas et dont l'ensemble fournit sur le plan de visée une projection quelque peu confuse.

(5) Z. Carrière, *Revue d'acoustique*, 1936, p. 116.

Ces ondulations sont visibles sur les flammes plates d'acétylène, ce qui légitime la conclusion ci-dessus, à savoir que les strates existent mais ne sont pas assez contrastées pour être stroboscopables dans la visée de face.

La difficulté n'existe plus pour les petites flammes dont j'ai à parler et dont je pense être le premier à parler.

8. **Flammes fusiformes sensibles.** — Je les obtiens avec un simple trou de 0,8 mm de diamètre percé dans du clinquant de préférence. Envoyons de l'acétylène et réglons la flamme à une vingtaine de millimètres de hauteur. Sous l'incidence de sons pas trop hauts, $N = 150$ par exemple, le fuseau initial s'étrangle par endroits et se présente sous la forme de deux ou trois grains de chapelet aisément immobilisés par le stroboscope (*fig.* 2, à gauche).

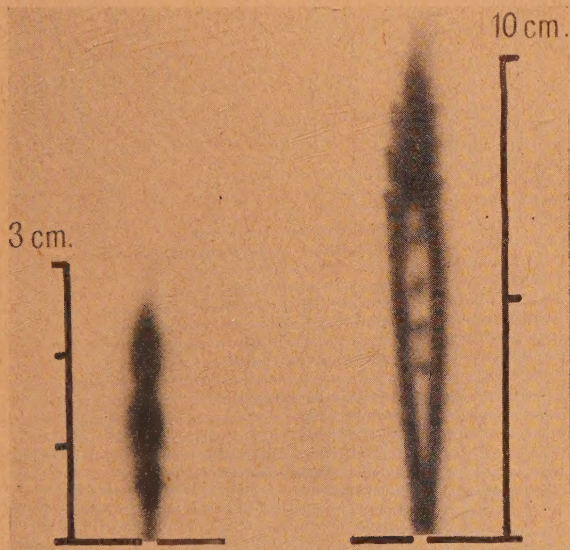


Fig. 2.

Sur le pied du fuseau qui est peu lumineux, aucun indice de périodicité tant que plusieurs renflements le surmontent.

Je puis réduire la hauteur de flamme à 10 et même à 5 mm. Renflements et rétrécissements ont disparu mais la flamme, à peu près hémisphérique a deux parties d'importance à peu près égale, l'une lumineuse, l'autre non lumineuse. C'est la frontière entre le demi-hémisphère supérieur lumineux et le cylindre inférieur obscur qui oscille verticalement à la fréquence de l'onde sonore incidente. L'amplitude de cette oscillation est minime (une petite fraction de millimètre). Elle existe et elle est une preuve irrécusable de la sensibilité de la flamme minuscule.

La vitesse propre de l'acétylène est, dans ce cas, insignifiante, même à son passage à travers le petit orifice; *a fortiori* dans l'hémisphère incandescent qui le surmonte. Où trouver le facteur vitesse donnant au nombre de Reynolds la grande valeur qui sert de base au critérium de sensibilité ?

Il faut considérer la flamme minuscule principalement comme source de chaleur échauffant l'air qui la surmonte. Échauffé, l'air prend une vitesse ascensionnelle propre très supérieure à la vitesse de l'acétylène. A cette ascension participent d'ailleurs les couches aériennes qui avoisinent la flamme à son propre niveau.

Pour tous les fluides sensibles, le diagramme de Tollmien doit s'entendre de l'ensemble des fluides formant le système en mouvement, quelle que puisse être la nature de ces fluides. La flammèche d'acétylène est surmontée d'une colonne d'air chauffé ascendante, colonne qui entraîne d'ailleurs par viscosité un cylindre d'air ascendant de diamètre égal à plusieurs fois le diamètre de l'acétylène. C'est dans ce cylindre d'air extérieur à la flammèche qu'il faut vraisemblablement chercher la plage sensible dotée d'un diagramme à inflexion. Plage sensible où nous n'apercevons rien, faute de détecteur approprié. Mais sur la flammèche d'acétylène, nous percevons la réaction parfaitement périodique des déformations subies par les lignes de courant dans cette plage sensible.

Au lieu de réduire la flamme, augmentons-la; jusqu'à 50 et même 80 mm sont visibles des variations périodiques du contour apparent, asymétriques d'ailleurs par rapport à la verticale. D'autre part, sur l'axe de la flamme assombri se dessinent des taches plus ou moins noires, équidistantes, jouissant de toutes les propriétés des strates dont j'ai déjà parlé (*fig.* 2 à droite).

Pour des flammes de 60 à 100 mm, ondulation du contour apparent et taches d'intensité sur l'axe coexistent. Au-dessus de 100 mm, seules subsistent les taches qui disparaîtront à leur tour pour des débits supérieurs.

Du sommet d'une flamme d'acétylène de fort débit se détachent quelquefois des languettes rougeâtres sur lesquelles se manifeste la sensibilité maxima. Je n'ai pas réussi à les obtenir à volonté.

Le méthane naturel, le butane donnent les mêmes flammes sensibles que l'acétylène, moins contrastées d'ailleurs. Le gaz de ville toulousain semble ne pas les donner, quelque précaution qu'on prenne de régler le stroboscope d'autre part, mais il les donne aisément après passage sur des tampons imbibés de benzine ou d'essence.

La flamme veilleuse d'une lampe « pigeon » ne les donne pas, qu'elle soit alimentée à l'essence ou à la benzine. Il faut attribuer à la mèche de la lampe une influence qu'il est facile de contrôler. Sous l'orifice en mince paroi qui donnait des flammes sensibles avec l'acétylène mettons un tampon

d'ouate. La sensibilité est supprimée quelle que soit la hauteur de flamme admise; il n'y a ni variations de contour apparent, ni taches axiales.

La flamme d'une bougie n'est pas sensible, mais la flamme allumée sur un petit trou percé dans le dôme d'une chaudière où sont chauffées des rognures de bougie est parfaitement sensible jusqu'à des hauteurs de 12 cm.

9. **Rôle du réservoir.** — Ces dernières expériences mettent en question le rôle du réservoir jusqu'ici passé sous silence. Elles obligent à conclure que le fluide de la plage sensible, perturbé par l'onde sonore, réagit sur le fluide aval et induit dans le réservoir, au-dessous de l'orifice, des variations de pression dans lesquelles peut se trouver la cause principale des étranglements périodiques manifestés par la flamme fusiforme.

J'ai cru pouvoir donner à ce postulat le caractère d'un fait expérimental irrécusable en tentant de mettre en évidence cette variation de pression.

Comme mesureur de pression alternative, j'ai choisi une capsule manométrique de 32 mm de diamètre, 0,4 mm de profondeur, réduisant à un tube de 50 mm de long et de 3,5 mm de diamètre la canalisation comprise entre l'orifice sensible et la capsule. Résultat négatif, tant avec un miroir collé à même la membrane, qu'avec un dispositif plus sensible déjà décrit (6).

Attribuant mon échec à une trop longue canalisation, j'ai employé, pour réduire au minimum sa longueur, le dispositif représenté figure 3.

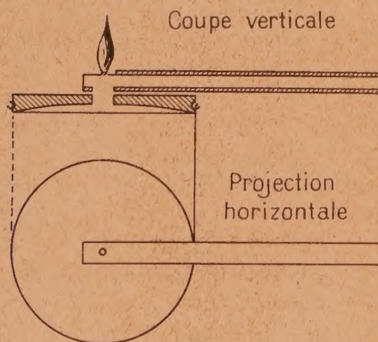


Fig. 3.

Résultat imprévu : la flamme d'acétylène n'a donné *aucun signe de sensibilité*, quelle que fût la pression et quel que fût le diamètre de l'orifice toujours pratiqué en mince paroi (sur un méplat)

De cet échec, j'ai d'abord rendu responsable le disque horizontal susceptible d'altérer notablement les lignes de courant de l'air aspiré. L'explication a dû être abandonnée devant le fait expérimental qu'une flamme bien sensible au bout d'un tube effilé vertical restait à peu près aussi sensible quand j'enfilais sur le tube, à 2 mm au-dessous de l'orifice, un disque métallique de 30 mm de diamètre.

Ne pouvant raisonnablement attribuer la perte de sensibilité à la seule présence de la chambre manométrique, considérée comme un volume gazeux, j'ai dû incriminer la membrane flexible fermant cette chambre.

L'épreuve cruciale, très facile, a consisté à appliquer, de bas en haut, au moyen d'un petit bouchon à bords émoussés, la membrane de caoutchouc contre le creux de la capsule. *De suite, la sensibilité a été rétablie.*

Autre variante de l'expérience : laissant le volume de la chambre capsulaire inchangé, appliquer de bas en haut, un disque plan qui déborde la capsule, mais supprime la liberté de la membrane. *La sensibilité est encore parfaitement rétablie.*

La mesure de la pression alternative induite par le son a échoué, mais la preuve est faite que cette pression existe lorsque le réservoir est à parois rigides. Une membrane ne fléchit que sous une variation de pression; nul ne sait si une membrane est ou n'est pas flexible s'il n'a appliqué une variation de pression.

10. **Jets et nappes d'air enfumé.** — La théorie de Tollmien vaut pour des fluides quelconques et des formes d'écoulement laminaire quelconques.

Sans invoquer cette théorie, Andrade (7) en fournit la justification pour les jets d'air issus d'orifices circulaires qu'il enfume avec du tabac.

A moindres frais, je fais passer l'air de haut en bas à travers une colonne de fer verticale de 20 mm de diamètre où j'ai tassé de la paille d'emballage surmontée d'un charbon chimique incandescent. Je n'ai eu aucune difficulté à trouver et à fixer les ondulations du jet engendrées par l'onde sonore. Le jet aérien filiforme n'est pas modifié par l'onde comme la flamme fusiforme envisagée ci-dessus. Au lieu des renflements et des étranglements centrés sur une même verticale observés sur les flammes, on a ici des ondulations de la ligne moyenne de part et d'autre de la verticale moyenne, dans le plan vertical passant par la source.

Au niveau sensible (correspondant à l'inflexion du diagramme), le jet est assez mobile pour obéir au déplacement instantané de l'onde sonore. L'ondulation va s'amplifiant d'ailleurs et dégénère rapidement en enroulements tourbillonnaires alternés. On a affaire à des ondes qui s'emballent.

Tout jet filiforme sensible est surmonté d'un cône ou d'un éventail plus ou moins turbulent. C'est au voisinage du sommet de ce cône que sont visibles les enroulements spatialement équidistants, quelques-uns au-dessus, quelques-uns au-dessous. On

(6) Z. Carrière, *Cahiers de Physique*, I, p. 15.

(7) *Proced. of the Physical Soc.*, 1941.

peut encore stroboscoper quand le cône est franchement turbulent.

J'ai obtenu de superbes nappes d'air enfumé avec les ajutages à fente réduite déjà utilisés pour des flammes. La figure 4 en représente une vue de face et de profil. La fente a 3 mm de largeur, 4,5 mm de longueur, ouverte dans un tube aplati de 18 mm de diamètre.



Fig. 4.

Les franges ont la même forme que celles des flammes, mais, au moins pour des vitesses pas trop grandes, elles naissent dans le plan même de la fente, nettement visibles dès leur émergence.

Ce sont des ondulations, comme le marque la vue de profil. Non pas de simples ondulations car cette pure déformation d'une nappe imperméable ne donnerait pas aux creux la netteté constatée. La nappe n'est visible, sous fort éclairage, que par les gouttelettes d'eau qu'elle entraîne. Si, dans la direction de visée, l'épaisseur du nuage diffusant est uniforme, le nuage doit paraître uniformément lumineux. L'ondulation produit une légère variation de cette épaisseur qui n'explique pas la parfaite netteté des franges obtenues.

Il y a variation locale de la densité de gouttelettes diffusantes. Une frange lumineuse est le lieu de densité maxima. Quel mécanisme peut causer cette variation ?

C'est l'appel d'air atmosphérique aspiré par le jet fumeux ascendant. Cet air aspiré ne fait pas que déformer la nappe, il la pénètre, s'incorpore à elle et, ce faisant, dilue les gouttelettes dans un plus large volume.

Comme dans tous les cas de sensibilité, cette dilution a lieu à peu près exclusivement dans la plage sensible. Nées dans cette plage les franges sont emportées par le flux qui s'écoule avec sa vitesse propre.

Il n'y a pas deux aspirations par période; la nappe agit principalement par la face qu'attaque l'onde sonore. Cette conclusion résulte de l'aspect des franges qu'on voit, dans le cas dont je parle, sortir de l'orifice comme un gros bourrelet : il n'y a pas deux sortes de bourrelets distinguables par leur forme ou leur luminosité. La fente que j'utilise est une fente réduite. Il y a une variation très rapide de la forme de la nappe qui, sur quelques millimètres de parcours doit changer son orientation de 90°, changement qui explique le terme de bourrelet que j'ai employé.

Le jet sensible, à l'endroit où il est sensible, est très absorbant pour l'onde sonore. Il annule donc lui-même ou au moins atténue fortement l'action du vecteur déplacement sur la face opposée à la source.

On ne peut parler d'équidistance des franges que pour celles d'un numéro d'ordre un peu élevé. La distance de deux consécutives est maxima tout près de l'orifice. Dans la figure 4, elle vaut à peu près 1,5 fois la distance des franges les plus élevées. En augmentant le débit fumeux, la nappe représentée figure 4 se déforme. Vers son milieu, naît une nappe nouvelle normale au plan de la figure, dans laquelle règne une turbulence caractérisée et où l'on n'observe jamais de franges. Mais dans la portion persistante de la nappe de la figure 4, on peut encore en apercevoir, surtout au voisinage de l'insertion de la nappe nouvelle. On peut encore stroboscoper avec des jets fortement turbulents.

11. **Bunsens sensibles.** — Les manchons Auer sont portés à l'incandescence par des brûleurs constitués de la manière suivante. Dans le plancher horizontal d'une petite chambre sont percés trois ou quatre petits trous par où arrive le gaz qui aspire l'air extérieur à travers les évents réglables ouverts dans les parois latérales. Au plafond de la chambre est une toile métallique au-dessus de laquelle le mélange combustible est enflammé et joue son rôle de source chaude.

Les jets de gaz dans la petite chambre peuvent être sensibles et le sont généralement grâce à la vitesse élevée qu'ils possèdent. Reste à déceler cette sensibilité. Voici comment je l'ai soupçonnée.

Soumis, comme tout le monde, à des restrictions de l'éclairage électrique, j'avais monté et allumé un bec de ce genre muni d'un manchon très ancien dont l'incandescence était très défectueuse. Un jour, j'ai constaté qu'il répondait à ma toux par une baisse d'éclairage sensible. J'ai toussé à nouveau, j'ai parlé à haute voix, frappé sur un meuble, excité un tuyau sonore. Chaque fois, le bec a répondu, avec quelque inertie il est vrai, mais sans aucune défaillance. Plusieurs jours de suite, j'ai poursuivi

l'épreuve qui ne réussissait pas toujours. Une cause d'insuccès, aisément contrôlable, était l'insuffisance de la pression d'alimentation; une autre, la position du manchon ou même du verre qui l'entourait.

Bref, j'ai reconnu que la sensibilité était optima lorsque, la pression du gaz étant maxima, la surface incandescente du manchon était limitée à une bande verticale à peine plus large que le rayon du manchon, divisée par un étranglement, en deux zones très inégales, dont la supérieure avait une aire deux fois plus grande que l'inférieure.

En l'absence de son ou de bruit, la distinction des deux zones était à peine sensible; sous l'action des ondes sonores, l'étranglement amorcé s'accentuait jusqu'à séparer complètement les deux zones, l'aire de la zone supérieure diminuant ou ce qui revient au même, son éclat intrinsèque étant très affaibli.



Air calme. Bruit. Air calme.

Fig. 5.

Dans la figure 5, au milieu, un cliché représente le manchon attaqué par l'onde sonore entre deux vues du même manchon libéré de cette contrainte. C'est un positif : la plage supérieure est moins noire (incandescence maxima) à droite et à gauche qu'au milieu.

La théorie de Tollmien semble s'appliquer puisqu'il y a des jets gazeux dont la sensibilité s'évanouit lorsque leur vitesse est insuffisante.

Le manchon n'est qu'un détecteur de sensibilité, son incandescence dépend du flux calorique transporté par le gaz, flux dont rien ne garantit l'écoulement vertical uniforme et dont le régime ascendant dépend de multiples paramètres. Que les quatre jets soient inégalement sensibles parce que sortis d'orifices inégaux ou inégalement obstrués de poussières suffit à expliquer la variation de la répartition de la chaleur sur les diverses parties du manchon. La vétusté du manchon et sa défectueuse adaptation tant au brûleur qu'au gaz combustible, ne sont sans doute pas sans influence sur la réussite de l'expérience.

La perturbation de l'incandescence dure comme l'onde sonore elle-même. Elle ne garde aucune caractéristique de la période perturbatrice à cause de la capacité calorifique, non seulement du manchon, mais encore de la grille qui surmonte la chambre d'aération et qui détruirait certainement, si elle existait, toute stratification périodique arrivant sur elle.

C'est dans la chambre d'aération elle-même qu'il faudrait chercher à détecter cette périodicité.

Bien que les sons graves semblent un peu plus actifs sur ce bunsen spécial, les sons aigus, 1000 et au-dessus, produisent la même perturbation. Aucune résonance ne paraît susceptible d'expliquer le phénomène. Les sons de longueur d'onde multiple ou sous-multiple de la longueur du verre cheminée n'ont pas d'efficacité particulière.

12. **Mesureur d'interstrates.** — La vitesse des strates ascendantes étant exactement égale à la vitesse d'écoulement du gaz, il devient désirable de la mesurer avec quelque précision.

A défaut de photographie instantanée qu'on ne réalise, avec des jets fumeux, qu'avec des puissances d'éclairage de plusieurs kilowatts, voici un dispositif plus à portée des laboratoires. Mon viseur stroboscopique comprend un objectif et un oculaire indépendants, ce dernier visant dans le plan des fentes (*fig.* 6).

L'objectif est à l'extrémité d'un tube dans lequel, commandé par une crémaillère, coulisse un second

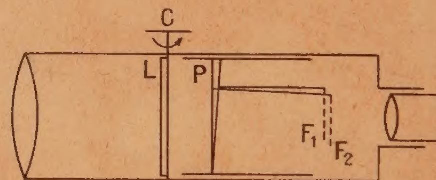


Fig. 6.

tube dont la moitié de la section normale est couverte par un prisme P d'angle petit (5°). J'oriente l'arête de ce prisme parallèlement aux franges horizontales dont je désire l'équidistance. J'obtiens ainsi, dans le plan que vise l'oculaire, deux systèmes de franges F_1, F_2 juxtaposées identiques, translatés verticalement l'un par rapport à l'autre d'une longueur qui dépend de la distance du prisme au plan de visée. Manœuvrant la crémaillère, je rends cette translation égale à un multiple entier de l'équidistance à mesurer. L'opération est réalisable sans effort, quel que soit le déréglage (petit) du stroboscope. Que les franges paraissent monter ou descendre, c'est toujours, au voisinage du même point de visée, la frange de droite un peu trop haute qu'il s'agit d'amener au niveau de la frange de gauche un peu trop basse. Et si un couple de franges qu'on est en train de rapprocher disparaît vers le haut, on trouve au-dessous un couple ayant exactement

le même aspect et le même écart relatif, dont le réglage se continue sans difficulté. Les franges individuelles n'interviennent pas : interviennent seuls les deux systèmes droit et gauche dont il faut seulement annuler la translation relative. Le réglage approché se conserve d'ailleurs et peut à un moment quelconque être poursuivi et amélioré.

Les systèmes de franges horizontales sont toujours pratiquement séparés par une bande obscure verticale dont il y a avantage à réduire et même à supprimer la largeur. C'est facile au moyen d'une lame épaisse à faces parallèles L couvrant l'une ou l'autre demi-section du tube, susceptible de tourner autour d'une parallèle au diamètre vertical qui sépare les deux demi-sections. En manœuvrant le bouton C, on amène les deux systèmes à comparer exactement au contact.

Reste à comparer la translation réalisée à une échelle millimétrique. Ce qui se fait en portant la dite échelle à la place des franges et en lisant, en millimètres, le décalage des deux moitiés de l'échelle dédoublée.

Manuscrit reçu le 2 octobre 1947.

DISCUSSION DE NOUVELLES EXPÉRIENCES SUR LES GRANDES GERBES DE L'AIR (GERBES D'AUGER)

Par J. DAUDIN et A. LOVERDO.
Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure.

Sommaire. — Confrontation et discussion de résultats expérimentaux obtenus au moyen de compteurs en coïncidence par divers auteurs, à différentes altitudes (2170 m et niveau de la mer). Les rapports $\frac{Q}{T}$ et $\frac{T}{D}$ entre les nombres de coïncidences doubles D, triples T et quadruples Q permet d'étudier la densité des grandes gerbes d'Auger. Les différents résultats sont en bon accord en ce qui concerne la variation de la fréquence des gerbes en fonction de leur densité, à un même niveau.

1. Introduction. — Durant la guerre, de 1942 à 1944, des travaux ont été poursuivis en France et en Italie sur les gerbes d'Auger. Les résultats, qui ont été obtenus indépendamment par Cocconi, Loverdo et Tongiorgi [1] méritent d'être confrontés avec les résultats déjà publiés en France [2] (1). D'autres expériences, en outre, doivent être rapprochées des nôtres.

2. La densité des grandes gerbes de l'air. — Lorsque deux compteurs éloignés entrent en coïncidence, ils annoncent le passage d'une gerbe comprenant au moins deux rayons distincts, mais sont muets sur le nombre et la disposition des autres particules.

Auger et ses élèves ont supposé les trajectoires réparties au hasard et ont admis, pour toutes les gerbes, une densité moyenne déterminée. Dans ces conditions, si Δ est le nombre de trajectoires au mètre carré et si S est la surface d'un compteur, la probabilité que le compteur soit touché est, d'après Poisson,

$$p(\Delta, S) = 1 - e^{-\Delta S}. \qquad (1)$$

Ce sera, par exemple, la fréquence avec laquelle un troisième compteur sera touché lorsque les deux premiers le sont : c'est-à-dire le rapport des coïncidences triples aux doubles $\frac{T}{D}$ $\left(\text{ou encore des quadruples aux triples } \frac{Q}{T}\right)$.

Comme les densités ainsi obtenues varient énormément avec le nombre et la surface des compteurs en coïncidence, on en conclut que l'analyse précédente est insuffisante. On peut penser, avec l'un de nous en 1941, ou avec Clay [3], que la formule de Poisson n'est pas valable. Ou bien, comme l'expérience l'a montré, que les gerbes ont des densités très variables.

Après avoir examiné sommairement les conséquences de cette répartition des gerbes sur un très grand domaine d'énergies et de densités, Daudin concluait en 1942 [4] : « Un système de compteurs en coïncidences doubles ou triples constitue un monochromateur qui n'enregistre que les gerbes comprises dans un intervalle étroit d'énergie. Si l'on

(1) Nous regrettons que les circonstances de guerre et l'isolement en sanatorium nous aient empêché de connaître, avant cette année, les divers travaux étrangers qui sont discutés ici. — DAUDIN.

utilisait des compteurs dix fois plus grands, on devrait trouver une densité moyenne au mètre carré dix fois plus petite. » L'expérience ainsi suggérée n'a été qu'amorcée en France [5], mais a été menée à bien en Italie par Cocconi, Loverdo et Tongiorgi en 1942 et 1943. Le Tableau I résume les principaux résultats obtenus à 2170 m d'altitude avec des compteurs dont la surface a varié d'un facteur 100. Les coïncidences triples et quadruples ont été enregistrées simultanément.

On voit que la densité Δ varie bien en raison inverse de la surface des compteurs, de sorte que la densité moyenne déduite de la formule (1) est celle d'un groupe de gerbes choisies par les compteurs. C'est une grandeur qui dépend avant tout des instruments d'observation.

3. **La distribution des grandes gerbes de l'air en densité.** — Ainsi s'introduit une nouvelle inconnue : suivant quelle loi les gerbes qui touchent une surface déterminée se distribuent-elles en densité ? Quelle est la fréquence des gerbes de densité moyenne comprise entre Δ et $\Delta + \mathrm{d}\Delta$? Il faut donc pouvoir connaître le nombre de trajectoires dans une gerbe déterminée.

Si les compteurs sont incapables de nous donner à ce sujet plus que de simples probabilités, on peut penser à deux autres instruments : la chambre de Wilson, qui compte directement les trajectoires, la chambre d'ionisation qui permet d'atteindre le nombre de particules par l'intermédiaire de l'ionisation globale qu'elles ont suscité. Mais les chocs d'Hoffmann dus à des particules rapides et nombreuses ne peuvent être distingués par la chambre d'ionisation des chocs dus à un petit nombre de particules lourdes et lentes que projettent les explosions nucléaires.

Récemment, Skobeltzyn et Lazaréva [6] ont levé la difficulté : ils ont employé deux trains de compteurs proportionnels en coïncidence; ils ont éliminé ainsi les désintégrations nucléaires presque certainement localisées à un appareil. Alors que les chocs d'amplitude supérieure à S varient en fréquence comme S^{-p} pour un seul compteur, ils varient, comme $S^{-p'}$, pour deux compteurs. L'exposant p' serait très inférieur à p ($p' = 1{,}3$ à 3250 m au lieu de $p = 2{,}3$). L'exposant p' devient ainsi d'un ordre de grandeur tout à fait comparable à celui observé par nous-mêmes. Pourtant, la contradiction signalée par Auger et Daudin en conclusion de leur article n'est pas encore bien éclaircie en ce qui concerne la chambre d'ionisation proprement dite.

Lewis arrive à des résultats numériques assez différents par une méthode analogue à celle de Lazaréva avec deux chambres d'ionisation. Il semble même, d'après Kingshill et Lewis que les résultats obtenus avec la chambre d'ionisation dépendent énormément de l'épaisseur de la paroi. Lapp, dans un travail antérieur avait trouvé, pour les chocs d'Hoffmann associés à des gerbes d'Auger, une loi de fréquence du type S^{-p} [7].

La chambre de Wilson reste l'instrument le plus complet et il serait désirable de disposer de telles chambres de très grande dimension. En attendant,

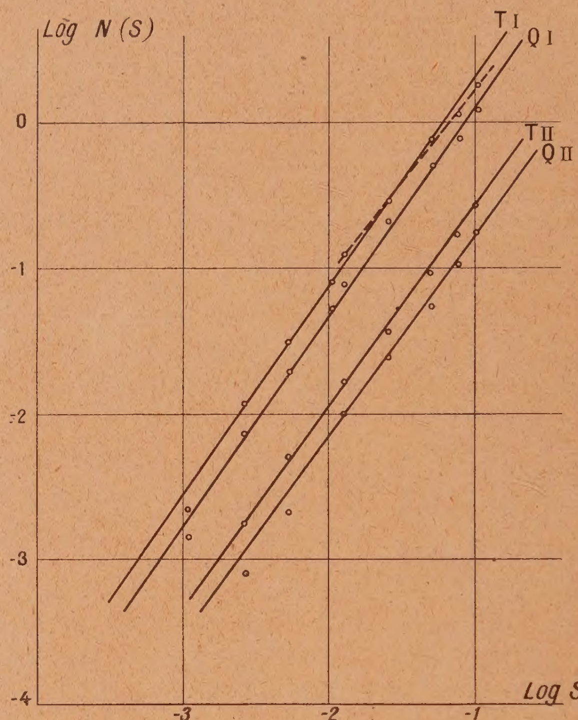


Fig. 1. — Variation des coïncidences en fonction de la surface des compteurs en coordonnées doubles logarithmiques, d'après Cocconi, Loverdo et Tongiorgi (N en min^{-1}, S en m^2).

T I, Coïncidences triples à 2 170 m (la droite en pointillé représente la variation vraie pour les cinq dernières surfaces réalisées avec des compteurs de 129 cm^2 au nombre de 1, 2, 4, 6 et 8 par groupe); Q I, coïncidences quadruples à 2 170 m; T II, coïncidences triples à Milan; Q II, coïncidences quadruples à Milan.

une chambre de Wilson de petite surface peut également permettre d'atteindre le nombre moyen de trajectoires pourvu que les fluctuations soient normales. Mais la chambre de Wilson doit être déclenchée de l'extérieur. Si des compteurs la déclenchent, ils sélectionnent les gerbes et faussent les statistiques. Auger et Daudin exposent, dans leur travail, dans quelles conditions cette sélection est négligeable et comment on peut en général en tenir compte pour interpréter l'ensemble des résultats expérimentaux.

Chambre de Wilson et chambre d'ionisation, exception faite des expériences de Lewis, paraissent s'accorder en faveur d'une loi de fréquence, telle que les gerbes de densité moyenne comprise entre Δ

et $\Delta + d\Delta$, soient au nombre de

$$\nu(\Delta)\, d\Delta = k\, \Delta^{-\gamma-1}\, d\Delta. \qquad (2)$$

D'après les théorèmes des probabilités totales et composées, le nombre des coïncidences entre n compteurs semblables devient

$$N = k \int \Delta^{-\gamma-1} (1 - e^{-\Delta s})^n\, d\Delta. \qquad (3)$$

Cette formule, à la différence de (1) contient deux paramètres arbitraires k et γ.

Il faut donc deux expériences pour déterminer ces constantes au moyen desquelles on doit, dans certaines limites, retrouver les résultats expérimentaux à attendre avec une disposition quelconque.

L'expérience des surfaces variables poursuivie en Italie a permis la vérification de la loi (2) sous une forme frappante qui met en évidence immédiate l'exposant γ. D'après (3), si l'on multiplie la surface des compteurs par λ, le nombre des coïncidences est multiplié par λ^{γ}. La figure 1 montre que cette conséquence est vérifiée : les courbes donnant Q et T en fonction de S en coordonnées doubles logarithmiques se confondent avec des droites de pente $\gamma = 1{,}45$.

A la même altitude, Auger et Daudin ont interprété diverses statistiques de compteurs et de chambre de Wilson avec $\gamma = 1{,}5$.

TABLEAU I.

Variation de la densité avec la surface des compteurs à 2170 m.

Surface des compteurs en m².	Rapport quadruples/triples	Valeur de la densité moyenne m^{-2}	Valeur de ΔS.
0,0011.....	0,63 ± 0,06	890 ± 145	0,98 ± 0,16
0,0027.....	0,627 ± 0,03	370 ± 30	1,00 ± 0,081
0,0054.....	0,627 ± 0,025	183 ± 12	0,99 ± 0,065
0,0108.....	0,648 ± 0,02	97 ± 5,5	1,049 ± 0,06
0,0129.....	0,640 ± 0,016	79,2 ± 3,5	1,021 ± 0,045
0,0258.....	0,648 ± 0,015	40,4 ± 1,4	1,041 ± 0,036
0,0516 (*)..	0,664	21,7	1,12
0,0774.....	0,675	14,9	1,15
0,1032.....	0,700	12,2	1,26

(*) Les coïncidences triples avec $S = 0{,}0516$ et au-dessus sont corrigées des fortuites évaluées par une méthode indirecte.

Les valeurs de Δ, $\frac{Q}{T}$ et ΔS correspondantes sont donc susceptibles de légères modifications, relativement plus importantes au niveau de la mer.

4. **Discussion des résultats expérimentaux obtenus en Italie.** — *a. Expériences à* 2170 m (7,95 m *d'eau*). — On peut, semble-t-il, tirer une autre indication de l'expérience italienne. D'après le Tableau I, le rapport $\frac{Q}{T}$ varie lentement lorsque la surface des compteurs augmente. Pour $\gamma = 1{,}5$, $\frac{Q}{T}$ doit être égal à 0,64 : c'est bien la valeur moyenne observée. Mais on voit que pour des densités variant de 1000 à 10 par mètre carré, γ varie lentement de 1,55 environ à 1,35, d'après la figure 2.

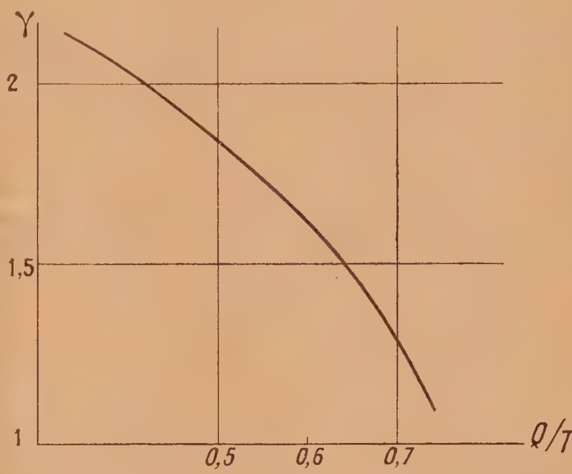


Fig. 2. — Variation de l'indice γ avec le rapport $\frac{Q}{T}$.

Bien que des raisons fortuites puissent avoir contribué à faire varier $\frac{Q}{T}$, il est probable que l'exposant varie réellement. A l'autre extrémité du domaine des densités la chambre de Wilson donne des pentes de l'ordre de 1,6.

L'indice γ paraît décroître avec la densité de façon que l'intégrale du nombre total de gerbes

$$\int k\, \Delta^{-\gamma-1}\, d\Delta$$

reste finie.

Cocconi, Loverdo et Tongiorgi ont bien montré qu'une voûte, même légère, fausse légèrement la pente de la droite. Les gerbes secondaires accroissent, en effet, proportionnellement le rendement des petits compteurs plus que celui des grandes surfaces de compteurs.

Donc l'indice γ qu'ils ont observé doit être corrigé d'une grandeur un peu incertaine qui le porterait aux environs de 1,55.

Mais il est une autre cause d'erreur qui explique sans doute l'écart que les points présentent autour de la droite moyenne; lorsqu'on dispose côte à côte deux compteurs en parallèle on ne constitue pas un compteur de surface double pour toutes les direc-

tions de rayons; de plus, la corrélation locale des trajectoires n'est pas négligeable.

Des expériences tendant à préciser ce point sont actuellement conduites par les auteurs à l'Observatoire du Pic du Midi.

Enfin, les chocs sont divisés par deux et les pertes éventuelles du sélecteur risquent d'être plus grandes [8]. Ceci explique peut-être que les groupes de quatre compteurs de 27 cm² constituant des surfaces de 108 cm² comptent anormalement peu (les coïncidences s'écartent de la fréquence prévisible de plus de trois fois l'erreur probable).

De même les grandes surfaces ont été réalisées par association de deux à huit compteurs disposés côte à côte : or la pente moyenne indiquée par les cinq derniers points donne un γ de 1,26, inférieur au γ moyen pour les mêmes surfaces déduit des valeurs de $\frac{Q}{T}$ ($\gamma = 1{,}4$).

b. Expériences au niveau de la mer. — Le Tableau II donne le résultat d'expériences analogues faites par les mêmes chercheurs au niveau de la mer.

Tableau II.

Variation de la densité avec la surface des compteurs au niveau de la mer.

Surface des compteurs en m².	Rapport $\frac{\text{quadruples}}{\text{triples}}$	Valeur de la densité moyenne m^{-2}.	Valeur de ΔS.
0,0027.....	0,445 ± 0,04	220 ± 46	0,60 ± 0,13
0,0054.....	0,408 ± 0,04	97 ± 29	0,53 ± 0,16
0,0129.....	0,605 ± 0,02	73 ± 4,6	0,94 ± 0,06
0,0258.....	0,675 ± 0,025	43,5 ± 2,8	1,12 ± 0,07
0,0516 (*)..	0,60	17,8	0,918
0,0774.....	0,64	13,2	1,021
0,1032.....	0,63	9,7	1,001

(*) Voir la note au Tableau I.

On voit que le rapport $\frac{Q}{T}$ est sensiblement plus faible qu'à 2170 m. En choisissant comme moyenne 0,60, on trouverait un γ un peu supérieur à 1,6 en bon accord avec l'équipe française.

Mais la pente du diagramme donnant Q et T en fonction de S en coordonnées doubles logarithmiques n'est que de 1,45. Il n'y a donc plus ici accord entre le γ déduit de $\frac{Q}{T}$ et la pente du diagramme.

Comme le rapport $\frac{Q}{T}$ montre des fluctuations assez considérables on peut, nous semble-t-il, réserver le jugement et estimer nécessaire une nouvelle expérience, qui tiendra un compte particulier des difficultés inhérentes à tout groupement de compteurs en parallèle. Cette faible valeur de γ, comparée à la valeur corrigée (un peu incertaine) obtenue en altitude, permit à Cocconi, Loverdo et Tongiorgi de conclure que γ croît quand on s'élève comme le prévoit la théorie des cascades. C'est le contraire des observations françaises; il faut noter que les résultats obtenus en Italie considérés du point de vue du rapport $\frac{Q}{T}$ indiquent une variation de γ en sens opposé et s'accordent en revanche avec l'expérience française.

Comme il a été remarqué en 1942 par l'un de nous [9] toute décroissance du rapport $\frac{Q}{T}$ lorsqu'on s'élève en altitude est incompatible avec la théorie des cascades : si l'expérience montre que les gerbes très denses sont proportionnellement plus nombreuses en altitude, cela est contradictoire avec la théorie d'après laquelle les gerbes sont d'autant plus absorbables qu'elles sont moins denses.

Lewis et Wolfenstein [10] ont d'ailleurs depuis mis à nouveau cette contradiction en évidence : ils trouvent que les chocs d'Hoffmann de l'air très denses augmentent extraordinairement vite avec l'altitude ([2]).

5. **Grandes gerbes de l'air pénétrantes.** — Cocconi, Loverdo et Tongiorgi ont poursuivi leur expérience en couvrant les quatre compteurs de 15 à 20 cm de plomb. En même temps, un système de compteurs nus permettait d'observer les coïncidences sous plomb accompagnées de coïncidences dues à des gerbes d'Auger ordinaires. Notamment, ils ont utilisé un petit compteur de 15 cm².

Les résultats ainsi obtenus sont consignés dans le Tableau III. On voit que ce petit compteur a été touché très souvent et que les grandes gerbes pénétrantes sont aussi des gerbes de grande densité électronique. Autrement dit, les particules pénétrantes y sont rares au milieu des électrons. Telle est la conclusion des expérimentateurs.

Le rapport $\frac{Q}{T}$ pour les coïncidences sous plomb est de 0,64 ± 0,10 : ceci conduit à une répartition des gerbes pénétrantes en densité de particules pénétrantes analogue à la répartition des gerbes d'électrons avec $\gamma = 1{,}5 \pm 0{,}2$ ([3]).

([2]) Lewis et Wolfenstein ont montré, en outre, que l'extension latérale des noyaux denses des gerbes d'Auger est bien moindre que d'après la théorie. Ils se prononcent en faveur d'une origine locale pour ces condensations très denses, de même qu'Auger et Daudin d'après leurs observations à la chambre de Wilson.

([3]) La nature des particules des grandes gerbes pénétrantes ayant été mise en évidence par des mesures d'absorption des grandes gerbes de 0 à 20 cm de plomb : *voir* à ce sujet Cocconi, Loverdo et Tongiorgi, *Naturwissenschaften*, 1943, **31**, p. 135.

On peut donc essayer avec plus d'audace d'étendre aux mésons très pénétrants la méthode quantitative exposée par Daudin pour le rayonnement de pénétration moyenne.

Tableau III.

Gerbes d'Auger pénétrantes.

Surface des compteurs en m².	Durée des mesures en mn.	Nombre des coïncidences		
		triples.	quadruples sous écran.	triples sous écran (*).
0,0129...	66111	34	19	27
0,0258...	31271	32	23	23
0,0027...	20000	0	0	0

(*) Associées à une quadruple compteurs nus.

Supposons que les mésons soient répartis au hasard dans les gerbes d'Auger en proportion de n pour 100 des électrons, cette proportion étant stable d'une gerbe à l'autre. Les compteurs couverts de plomb sont donc des compteurs d'efficacité réduite, qui ne comptent que n pour 100 des trajectoires, ou encore ils sont équivalents à des compteurs de surface réduite à $\frac{n}{100}$ de leur surface nue. Mais alors n doit être calculable d'après la réduction du nombre de coïncidences. L'écran doit réduire les coïncidences dans un rapport $\left(\frac{n}{100}\right)^{\gamma}$.

Les coïncidences paraissent réduites d'un facteur 280 environ. Donc la réduction de surface par l'écran ou la proportion des mésons sont de $\left(\frac{1}{280}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$, soit $\frac{1}{42} = 2,5$ pour 100. Il y aurait, dans les gerbes d'Auger, 2,5 pour 100 de mésons environ. C'est la conclusion même à laquelle est parvenue Daudin à la fois au moyen de la chambre de Wilson et en analysant une expérience avec un compteur protégé.

On a confirmation approchée de l'hypothèse de base par l'examen des électrons accompagnant les mésons. Les compteurs protégés n'ont plus qu'une surface de 0,025 × (129 et 258) cm², soit 3 et 6 cm² environ. Un compteur nu de 15 cm² a donc une surface efficace bien plus grande. Le calcul peut se faire par la formule due à Schatzmann. On constate, par exemple, que le compteur de 15 cm² devrait être touché respectivement dans 91 et 82 pour 100 des cas. Or, les proportions observées sont 79 ± 10 pour 100 et 72 ± 10 pour 100. On voit que des compteurs protégés n'enregistrent que des gerbes comprenant une densité notable de mésons et donc une densité énorme d'électrons. Cependant, la densité électronique avoisinante paraît un peu plus faible que prévu. Ceci a été constaté aussi à la chambre de Wilson par Daudin.

6. **Conclusion.** — Les expériences étudiées apportent des faits nouveaux : elles appuient les résultats d'Auger et Daudin, tandis qu'en revanche, l'analyse faite par ces derniers permet de les discuter plus à fond.

1° La loi de fréquence des gerbes de l'air en fonction de la densité est prouvée par une expérience directe et de grande étendue : les coïncidences varient comme la puissance γ de la surface.

2° Les expériences faites en altitude jointes à celles faites avec la chambre fournissent la première indication d'une lente variation de γ avec la densité, variation qui a lieu dans le sens prévu.

3° Il y a contradiction au sujet des variations avec l'altitude, contradiction partielle en ce qui concerne l'expérience et totale en ce qui concerne les conclusions.

4° Il y a accord total au sujet du rayonnement très pénétrant dans les gerbes d'Auger qui paraît constituer 2 à 3 pour 100 du rayonnement électronique.

De nouvelles expériences permettront peut-être de lever certaines difficultés inhérentes au groupement de compteurs en parallèle.

Manuscrit reçu le 28 août 1947.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Cocconi, Loverdo and Tongiorgi, *Phys. Rev.*, 1946, **70**, p. 841, 846, 852.
[2] Auger et Daudin, *J. de Physique*, 1945, **6**, p. 233. — Daudin, *Ann. de Physique*, 1945, **20**, p. 563.
[3] Daudin, *Thèses de doctorat*, Paris, 1942; *Ann. de Physique*, 1943, **18**, p. 145 et 217. — Clay, *Physica*, 1943, **9**, p. 897.
[4] Daudin, *Thèses de doctorat*, Paris, 1942, p. 58.
[5] Daudin, *C. R. Acad. Sc.*, 1943, **216**, p. 483.
[6] Skobeltzyn et Lazaréva, *Phys. Rev.*, 1946, **70**, p. 439
[7] Lewis, *Phys. Rev.*, 1945, **67**, p. 228. — Kingshill et Lewis, *Phys. Rev.*, 1946, **69**, p. 139. — Lapp, *Phys. Rev.*, 1946, **69**, p. 321.
[8] Daudin, *Thèses de doctorat*, Paris, 1942, p. 35 et 36.
[9] Daudin, *Thèses de doctorat*, Paris, 1942, p. 59.
[10] Wolfenstein, *Phys. Rev.*, 1945, **67**, p. 238.

SUR LA POSSIBILITÉ D'EXISTENCE D'UN TYPE PARTICULIER DE RADIOACTIVITÉ PHÉNOMÈNE DE CRÉATION *e*

Par Raymond DAUDEL, Maurice JEAN et Marcel LECOIN.
Institut du Radium, Laboratoire Curie, Paris.

Sommaire. — Dans cet article, on montre la possibilité théorique d'existence d'un type nouveau de désintégration β. On étudie, en se plaçant toujours d'un point de vue entièrement théorique, les particularités qui caractériseraient le phénomène.

Description de l'effet principal. — La désintégration β^-, telle qu'on l'envisage habituellement, consiste en une transformation nucléaire qui élève d'une unité le numéro atomique du noyau et qui s'accompagne de l'émission d'un électron et d'un neutrino.

Il est possible d'imaginer une désintégration β^- qui ne s'accompagnerait pas d'émission d'un électron [1]. Il suffit en effet d'admettre que l'électron formé au moment de la désintégration ne possède pas assez d'énergie pour quitter le champ du noyau. Dans ces conditions, il doit rester dans ce champ et devenir un électron périphérique. Il faut remarquer qu'il existe toujours, au moins, une place libre pour recevoir cet électron. La charge du noyau étant devenue $Z+1$, le cortège doit recueillir un électron pour constituer un atome neutre.

Le phénomène principal que nous appellerons création *e* peut donc être décrit de la façon suivante :

a. l'un des neutrons d'un noyau devient un proton;

b. un neutrino est émis;

c. le noyau recule;

d. un électron est créé et reste dans le champ du noyau, devenant ainsi électron périphérique.

Les différentes phases de ce phénomène doivent être considérées comme simultanées.

Conditions énergétiques de réalisation de la création *e*. — La création *e* est possible dès que l'énergie ΔW de la transition $Z \rightarrow Z+1$ dépasse l'énergie de création d'un électron périphérique de l'atome $Z+1$ (1). Cette énergie W_e comprend l'énergie au repos $m_0 c^2$ de l'électron diminuée de l'énergie ε du niveau sur lequel il se situera : $W_e = m_0 c^2 - \varepsilon$. Du point de vue énergétique, la condition de réalisation du phénomène s'écrira ainsi

$$\Delta W > m_0 c^2 - \varepsilon = W_e \qquad (1)$$

(1) Nous admettons que la masse du neutrino est négligeable.

W_e est donc toujours inférieur à 500 000 eV. Par conséquent, *la création e est toujours possible quand l'émission β^- est possible.*

Par contre, la réciproque n'est pas vraie et il est des cas où l'émission β^- étant impossible, la création *e* est encore possible. Il suffit que l'on ait

$$m_0 c^2 > \Delta W > m_0 c^2 - \varepsilon \qquad (2)$$

On voit que l'extension du domaine où ne peut se produire que la création *e* seule est mesurée par la valeur de ε. Pour des noyaux dépouillés d'électrons, ε peut atteindre 100 000 eV lorsque Z est de l'ordre de 90, ce qui conduirait à un domaine assez étendu. Malheureusement, les noyaux lourds dépouillés d'électrons sont très peu répandus. Dans les étoiles moyennement chaudes, comme le Soleil, les températures sont de l'ordre de 2500 eV et, par conséquent, au-dessous de $Z = 14$, les noyaux sont entièrement pelés. L'extension du domaine où la création *e* peut exister sans émission β^- est de l'ordre du millier d'électronvolts. *Le phénomène de création e peut donc être là très important.*

Sur terre, les noyaux sont toujours entourés d'électrons et les niveaux libres possèdent une faible énergie : ε ne dépassant guère quelques volts. Le domaine considéré est donc très réduit pour un atome neutre. *Seule l'ionisation peut accroître son extension.*

Description des effets secondaires. — La création *e* devrait s'accompagner d'une série d'effets secondaires.

1° Signalons tout d'abord qu'elle constitue un type particulier de désintégration β. Elle doit donc être suivie des mêmes filiations qu'une émission β. Notons cependant que, partant d'un même noyau, création *e* et émission β^- peuvent conduire à deux isomères différents d'un même noyau. Une création *e* pourrait donc, par exemple, être suivie d'une émission de photons nucléaires, même si l'émission β^-, qui prend naissance à partir du même noyau,

ne s'accompagne pas d'une telle émission γ. On peut représenter un tel processus par le schéma ci-dessous.

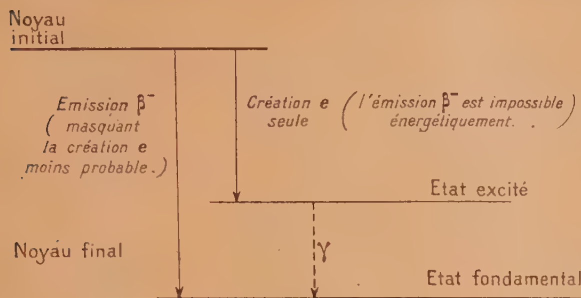


Schéma 1.

2° Remarquons maintenant que, comme dans le cas de l'émission β, lors de la désintégration nucléaire, le noyau atomique augmente d'une unité. Ce fait entraîne une augmentation de l'énergie attractive des niveaux de l'atome. Sur la couche K, par exemple, l'énergie qui était de l'ordre de $13,5\, Z^2$ eV devient $13,5\,(Z+1)^2$ eV. Il en résulte une variation égale à $13,5\,(2\,Z+1)$ eV allant de quelques électron-volts à quelques milliers quand on passe des éléments légers aux éléments lourds. Il doit en résulter une émission de photons d'origine électronique dont les longueurs d'ondes s'échelonnent suivant les cas du spectre visible aux rayons X mous.

3° Remarquons enfin que l'électron créé peut venir occuper au moment de sa création une case autre que la case libre de plus basse énergie. Un réarrangement du cortège doit alors suivre le phénomène. Cette réorganisation se fera par émission de photons électroniques. C'est une raison supplémentaire de penser que la création e devrait s'accompagner de l'émission de photons ayant leur origine dans le cortège. Cette raison n'existe pas dans le cas de l'émission β.

En résumé, *la création e doit généralement s'accompagner d'une émission de photons d'origine électronique. Elle peut être suivie de filiations radioactives* α, β et γ. Ces filiations sont les mêmes que celles qui suivent l'émission β^- — lorsqu'elle existe simultanément —, qui, partant du même état initial, conduit au même état final.

Influence de la structure du cortège et notamment de l'ionisation sur la période de création *e*. — L'un de nous [2] a montré que, théoriquement, la période des captures d'électrons ainsi que celle des conversions internes devraient dépendre de la nature du cortège électronique qui entoure le noyau en évolution. Indépendamment et simultanément, E. Segré [3] est arrivé aux mêmes conclusions en ce qui concerne la capture e.

Le phénomène de création e devrait, lui aussi, être extrêmement sensible à ce même facteur.

Il est évident, par exemple, que la création K est peu probable dans la molécule d'hydrogène qui renferme déjà les deux seuls électrons K que peut posséder un tel édifice. Le phénomène sera, par contre, bien plus probable chez l'hydrogène atomique.

Dans le cas où la création a lieu simultanément avec l'émission β^-, il est clair que toute perturbation apportée à la période de la création e perturbe aussi la période totale de désintégration β^-. Il y a donc là une raison théorique de penser qu'il est possible de perturber aussi la période apparente de certaines émissions β^- en agissant sur le cortège.

Etude théorique du phénomène. — Avant de se livrer à une étude détaillée du phénomène, on peut par une théorie simple en obtenir les caractéristiques essentielles et les comparer, qualitativement, à celles de l'émission β^-. On montre alors [4] que la probabilité de création e par unité de temps, peut s'écrire sous la forme suivante :

$$P = K_{\text{orbite}}\, Z^3\, |\, M\,|^2 (\Delta W - m_0 c^2 + \varepsilon)^2. \qquad (3)$$

Dans cette expression, M est l'élément de matrice portant sur les fonctions d'ondes nucléaires et K orbite Z^3 traduit la dépendance du niveau sur lequel se place l'électron. On est ainsi conduit aux remarques suivantes :

1° La probabilité P croît au moins comme le cube du numéro atomique Z du noyau final. La probabilité d'émission β variant plus lentement avec Z. *La création e sera donc favorisée par rapport à l'émission* β^- *pour des Z élevés;*

2° La probabilité de création e est proportionnelle au carré de l'énergie de transition ΔW diminuée de l'énergie de création $W_e = m_0 c^2 - \varepsilon$ de l'électron. Or, la probabilité d'émission β^- croît en gros comme la cinquième puissance de l'énergie de transition. Donc, *la création e, pour un même Z, sera défavorisée par rapport à l'émission* β^- *pour les grandes énergies de transition.*

3° Le facteur $K_{\text{orbite}} Z^3$ est proportionnel à la densité de probabilité de présence de l'électron dans le noyau après sa création. Il sera donc d'autant plus grand que l'électron se placera sur une orbite plus voisine du noyau au sens de la théorie de Bohr. Donc, toutes choses égales par ailleurs, *la création K sera plus probable que la création* α *elle-même plus probable que la création M, etc.*

4° Enfin, la probabilité P de création e dépendra encore de la valeur de l'élément de matrice $|\,M\,|^2$ dépendant des fonctions d'ondes nucléaires. Sans entrer dans le détail de l'étude de ce facteur, on peut présumer qu'il conduira à définir, tout comme pour l'émission β, des transitions permises et des transitions interdites de diverses espèces. De la transition (caractérisée par la variation du spin nucléaire et de la parité des fonctions d'ondes nucléaires) à

laquelle il correspondra, dépendra la possibilité de la création de l'électron dans un état s, p, d, etc. Une étude détaillée du phénomène devra donc comprendre un examen approfondi des différents ordres d'interdiction.

Probabilité de création K, transition permise. — Ayant ainsi dégagé les caractères généraux de la création e et pour donner une première idée de son importance, nous étudierons maintenant, d'une manière plus précise, le cas le plus favorable : celui d'une transition permise conduisant à une création K. La théorie des perturbations conduit à prendre pour expression de la probabilité de transition par unité de temps d'un état a à un état b :

$$P = 2\pi \, |H_{ab}|^2 \rho, \quad (^3) \qquad (4)$$

où ρ est le poids statistique des états finaux et H_{ab} est la matrice de perturbation associée à la transition.

La détermination de H_{ab} impose la connaissance de l'opérateur d'interaction H. Celui-ci s'exprimera à l'aide des fonctions d'ondes U du noyau initial, V du noyau final, ψ de l'électron et Φ de l'antineutrino évaluées à l'intérieur du noyau, des opérateurs habituels de la théorie de Dirac et des opérateurs Q et Q^* qui transforment un neutron en proton et réciproquement. Il est bien connu qu'il est possible, à l'aide de ces grandeurs, d'obtenir au plus cinq invariants relativistes linéairement indépendants. Nous n'aurons pas, pour le calcul qui nous intéresse, à choisir parmi ces cinq types d'opérateurs qui conduisent aux mêmes expressions pour les probabilités en ce qui concerne les transitions permises [5]. Nous adopterons l'opérateur utilisé par Fermi et que nous écrirons

$$H = g \left\{ (V^* Q U)(\Psi^* \Phi) - \left(V^* Q \vec{\alpha} U\right)\left(\Psi^* \vec{\alpha} \Phi\right) \right\} \qquad (5)$$

avec g constante nucléaire introduite par Fermi et $\vec{\alpha}$ vecteur matrice de Dirac.

Si l'on prend alors pour fonctions d'ondes de l'électron les fonctions de Dirac décrivant le mouvement d'un électron dans un champ central pour le spectre discret [6] et pour fonctions d'ondes de l'antineutrino des ondes planes (à énergie négative) normées dans un volume unité, le facteur ρ sera la densité des états de l'antineutrino et $|H_{ab}|$ devra comprendre une sommation sur les états de l'électron et être pris en moyenne sur toutes les directions de l'impulsion de l'antineutrino. On a, dans ces conditions, pour la probabilité de création K,

$$P_K = \frac{g^2}{2\pi^2} \int \mathrm{d}\omega_n \sum_{jlm} \left| \int \left\{ (V^* Q U)(\Psi^* \Phi) - \left(V^* \vec{\alpha} Q U\right)\left(\Psi^* \vec{\alpha} \Phi\right) \right\} d\tau \right|^2 q^2. \qquad (6)$$

La première intégration $\int \mathrm{d}\omega_n$ porte sur toutes les directions de l'impulsion $\vec{q}$ du neutrino. La somme $\sum_{jlm}$ porte sur les nombres quantiques de l'électron.

Pour les transitions permises, on peut négliger le second terme de l'élément de matrice. Considérant les fonctions d'ondes ψ et Φ comme constantes à l'intérieur du noyau, on peut les sortir du signe $\int$. On obtient ainsi

$$P_K = \left(\frac{g^2}{2\pi^3}\right) |M_0|^2 \, n_K \frac{\pi}{4} g_K^2 (W_0 - W_K)^2. \qquad (7)$$

Dans cette formule,

W_0 est l'énergie de désintégration,
W_K est l'énergie de la couche K, on a donc

$$q = W_0 - W_K.$$

g_K^2 est la valeur de la partie radiale des fonctions de Dirac pour une valeur de l'argument r égale au rayon nucléaire R,
n_K est égal à 0, 1 ou 2 suivant qu'il y a 0, 1 ou 2 cases libres sur la couche K,
M_0 est l'élément de matrice $\int V^* Q U \, \mathrm{d}\tau$.

En limitant, dans l'expression de g_K^2 les fonctions hypergéométriques (exprimées sous forme de séries des puissances croissantes de R) à leur premier terme non nul on obtient une très bonne approximation en raison de la petitesse de R. Et l'on a

$$g_K^2 = \frac{1 + W_K}{2\Gamma(2\delta_0 + 1)} (2\alpha Z_{\text{eff}})^3 \, e^{-2\alpha Z_{\text{eff}} R} (2\alpha Z_{\text{eff}} R)^{2s_0 - 2} \qquad (8)$$

avec

$$s_0 = \sqrt{1 - \alpha^2 Z_{\text{eff}}^2}$$

et

$$W_K = 1 - \frac{\alpha^2 Z_{\text{eff}}^2}{2} \qquad \alpha \text{ constante de structure fine.}$$

Nous avons introduit une charge effective Z_{eff} pour tenir compte de l'effet d'écran dû au reste du cortège. Cet effet est faible pour la couche K mais deviendra important pour les couches L, M, etc. et diminuera notablement les probabilités de création L, M, etc. Remarquons que W_K n'est autre que ce que nous avons précédemment appelé l'énergie de création (W_e) et a bien, avec les unités choisies, la forme $m_0 c^2 - \varepsilon$.

(3) Nous utilisons, dans ce qui suit, des unités telles que $m_0 = 1$, $c = 1$, $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1$. Les énergies sont ainsi mesurées en unités $m_0 c^2$, les impulsions en unités $m_0 c$ et les temps en unités $\frac{\hbar}{m_0 c^2}$.

Pour plus de commodité, nous écrirons (7) :

$$P_K = \left(\frac{g^2 |M_0|^2}{2\pi^3}\right) n_K \varphi_K Z_{\text{eff}} (W_0 - W_K)^2. \qquad (9)$$

Les valeurs de $\varphi_K (Z_{\text{eff}})$ étant données dans la table ci-dessous :

Z	10.	20.	30.	40.	50.	60.	70.	80.	90.
φ_K	$1,23.10^{-3}$	$1,1.10^{-2}$	$4,4.10^{-2}$	$1,25.10^{-1}$	$3,12.10^{-1}$	$7,45.10^{-1}$	1,65	3,35	6,4

Pour $Z < 10$, on a une bonne approximation en prenant

$$\varphi_K (Z_{\text{eff}}) \approx \pi (\alpha Z)^3. \qquad (10)$$

Importances relatives de l'émission β⁻ et de la création *K*. — Nous sommes maintenant à même de comparer les probabilités d'émission β⁻ et de création *e* dans des conditions identiques. Pour cela, nous calculerons le rapport

$$\frac{\text{Probabilité de création } K}{\text{Probabilité d'émission } \beta^-}. \qquad (11)$$

Dans le cas des transitions permises, on peut écrire, pour la probabilité d'émission β⁻ [7]

$$P_{\beta^-} = \left(\frac{g^2 |M_0|^2}{2\pi^3}\right) f^-(Z, W_0) \qquad (12)$$

avec

$$f^-(Z, W_0) = \int_1^{W_0} F(Z,W)\, W (W^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (W_0 - W)^2 \, dW.$$

où

$$F(Z,W) = \frac{4(2pR)^{2s-2} e^{\frac{\pi\alpha Z W}{p}} \left|\Gamma\left(s + \frac{i\alpha Z W}{p}\right)\right|^2}{|\Gamma(2s+1)|^2} \frac{1+s}{2},$$

$s = \sqrt{1 - \alpha^2 Z^2}$ et $p = \sqrt{W^2 - 1}$ = impulsion de l'électron.

Tenant compte de (12), on écrira le rapport (11)

$$\frac{P_{\text{cré} K}}{P_{\beta^-}} = n_K \frac{\varphi_K (Z_{\text{eff}}) (W_0 - W)_K^2}{f^-(Z, W_0)} = n_K \sigma(Z, W_0). \qquad (13)$$

Utilisant diverses approximations pour $f(Z.W_0)$, nous avons calculé $\sigma(Z, W_0)$ qui, dépendant de deux paramètres, pourra être donné dans un tableau à double entrée.

Pour $Z < 10$, on obtient les ordres de grandeur suivants :

W_0 en m_0c^2. Z	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
1,01	$5,7.10^{-3}$	$4,56.10^{-2}$	$1,54.10^{-1}$	3.10^{-1}	5.10^{-1}	$6,8.10^{-1}$	1	1,4	2	2,4
1,1	$1,8.10^{-4}$	$1,44.10^{-3}$	$4,8.10^{-3}$	$1,1.10^{-2}$	$2,2.10^{-2}$	3.10^{-2}	$4,1.10^{-2}$	6.10^{-2}	8.10^{-2}	1.10^{-1}
2	$3,1.10^{-6}$	$2,5.10^{-5}$	$8,3.10^{-5}$	2.10^{-4}	$3,8.10^{-4}$	$6,6.10^{-4}$	1.10^{-3}	$1,6.10^{-3}$	$2,2.10^{-3}$	$2,8.10^{-3}$

Pour $Z > 10$, on a les valeurs

W_0 en m_0c^2.	MeV. Z	10.	20.	30.	40.	50.	60.	70.	80.	90.
1,01	0,505	2,4	19	70	270	850	$2,1.10^3$	4.10^3	6.10^3	10 000
1,1	0,55	1.10^{-1}	4.10^{-1}	1	2,3	4,8	9,1	15,1	21	28
2	1	$2,8.10^{-3}$	$1,7.10^{-2}$	$4,4.10^{-2}$	$7,8.10^{-2}$	$1,25.10^{-1}$	$1,65.10^{-1}$	$2,25.10^{-1}$	3.10^{-1}	3.10^{-1}
3	1,5	$7,8.10^{-4}$	$4,4.10^{-3}$	$1,25.10^{-2}$	$2,5.10^{-2}$	$4,5.10^{-2}$	$6,6.10^{-2}$	$9,5.10^{-2}$	$1,2.10^{-1}$	$1,4.10^{-1}$
4	2	$3,1.10^{-4}$	2.10^{-3}	$5,7.10^{-3}$	$1,25.10^{-2}$	$2,15.10^{-2}$	$3,35.10^{-2}$	$4,8.10^{-2}$	$5,4.10^{-2}$	$5,8.10^{-2}$
5	2,5	2.10^{-4}	$1,3.10^{-3}$	$3,5.10^{-3}$	$7,1.10^{-3}$	$1,2.10^{-2}$	$1,7.10^{-2}$	$2,35.10^{-2}$	$2,65.10^{-2}$	$2,9.10^{-2}$
6	3	$1,2.10^{-4}$	$7,7.10^{-4}$	$2,1.10^{-3}$	$4,1.10^{-3}$	7.10^{-3}	$1,04.10^{-2}$	$1,33.10^{-2}$	$1,6.10^{-2}$	$1,8.10^{-2}$
7	3,5	8.10^{-5}	$4,1.10^{-4}$	$1,3.10^{-3}$	$2,5.10^{-3}$	$4,15.10^{-3}$	6.10^{-3}	$8,3.10^{-3}$	1.10^{-2}	$1,1.10^{-2}$

Nous avons résumé ces résultats dans les courbes de la figure 1. Ils sont conformes aux conclusions

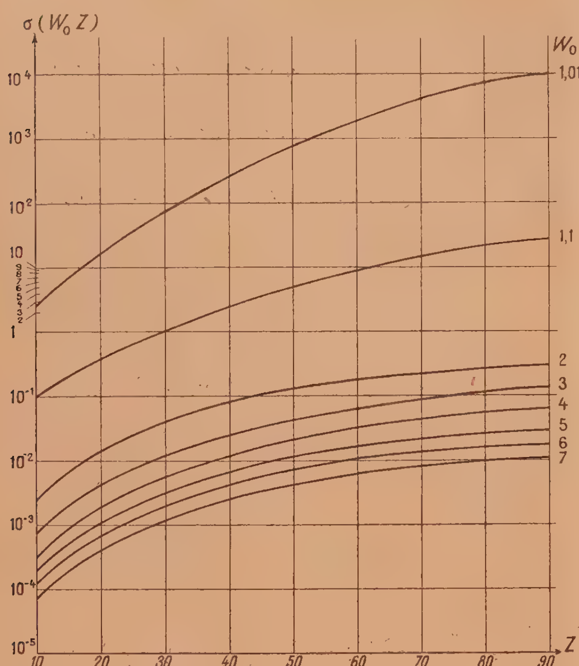


Fig. 1.

précédemment tirées de la théorie simplifiée. On voit clairement que le phénomène devient très important pour les éléments de numéro atomique élevé et pour des énergies totales de désintégration de l'ordre de l'énergie au repos de l'électron. Cependant, de tels éléments sont toujours pourvus de leurs électrons K dont il semble difficile de les débarrasser. C'est un point qui devrait tout de même entrer en ligne de compte dans l'étude des étoiles. Pour le tritium atomique, qui est le seul radioélément pouvant donner lieu normalement à la création K, la probabilité de création est seulement de l'ordre du millième de celle de l'émission β^- en raison de la petitesse de Z et malgré une énergie de transition favorable.

Pour les énergies de transition W, inférieures à 500 000 eV, l'émission β^- devient impossible et il faut, pour avoir une idée de l'importance de la création K, calculer la période de désintégration On l'obtient aisément à partir de (9) puisque

$$\tau = \frac{1}{P_K}. \tag{14}$$

En prenant pour $\left(\frac{2\pi^3}{g^2|M_0|^2}\right)$ la valeur $3.5\,10^3$s, qui est un minimum, et pour n_K la valeur 1, on trouve, en fonction de Z, les périodes suivantes correspondant à une énergie de désintégration égale à l'énergie au repos de l'électron. Ces périodes sont évidemment des périodes minima qui sont certainement beaucoup trop courtes pour les éléments lourds en raison de la variation de $|M_0|^2$ avec le nombre de masse A. Elles donnent cependant une idée quantitative de l'importance du phénomène.

Z..........	10.	20.	30.	40.	50.	60.	70.	80.	90.
τ sec........	$3,1.10^{11}$ 10^4 ans	$2,75.10^9$ 88 ans	$1,4.10^8$ 4,5 ans	$1,5.10^7$ 5,8 mois	$2,5.10^6$ 1 mois	5.10^5 5,8 jours	$1,25.10^5$ 1,4 jour	$3,7.10^4$ 0,43 j 10 h	$1,2.10^4$ 0,14 j 3,3 h

Mise en évidence du phénomène. — Il résulte des études précédentes qu'on devrait pouvoir espérer mettre en évidence ce phénomène à l'aide des différents procédés suivants :

a. lorsqu'à la création e ne se superpose pas d'émission β,

par observation directe du recul du noyau,

par observation d'un effet Szilard dû à ce recul,

par observation des photons électroniques,

par observation des désintégrations, soit, grâce à des filiations β, γ, α ou autres, soit en recueillant en quantité pondérable, les noyaux formés;

b. lorsque la création e coexiste avec l'émission β,

par décompte des désintégrations et des électrons émis (ce décompte devenant possible, en particulier, dans le cas d'existence des filiations),

par observation d'une variation de la période d'émission β en fonction de la nature chimique de la molécule renfermant le noyau étudié,

par observation d'un effet analogue sous l'influence d'une ionisation de nature physique ou classique.

On devrait être plus particulièrement tentés d'effectuer de telles recherches lorsque l'on a observé des désintégrations β ne s'accompagnant pas de l'émission d'un spectre continu décelable comme c'est le cas de Ac, Ra*D*, MsTh*I* [8]. Rappelons que ce sont, d'ailleurs, ces observations expérimentales qui ont été à l'origine des recherches théoriques qui font l'objet de cet exposé.

Des recherches seraient aussi opportunes dans les cas où l'on admet encore l'existence de deux isobares stables.

Importance du phénomène. — Nous résumerons brièvement ici les cas dans lesquels le phénomène de création risque de devenir important.

Lorsque la transition Z, $Z+1$ correspond à une différence énergétique supérieure ou égale à 500 000 eV, il y a nécessairement émission β en même temps que création *e*.

Le rapport de la probabilité de création à celle d'émission, dans le cas d'une même transition, croît avec Z et décroît avec l'énergie de transition. Il devient infiniment grand quand cette énergie tend vers 500 000 eV.

Pratiquement, dans le cas du tritium atomique, la probabilité de création *e* est seulement de l'ordre du millième de la probabilité d'émission β. Pour $Z=90$ et pour une énergie de transition analogue, *la probabilité de création K serait plus de* 1000 *fois plus grande que celle d'émission* β. C'est un point qui devrait entrer en ligne de compte dans l'étude des étoiles.

Le phénomène de création *e* peut même se réaliser sans que l'émission β soit possible si l'énergie de la transition est inférieure à 500 000 eV. Le niveau K des éléments lourds atteint 100 000 eV et la création K est donc possible pour une énergie de transition s'abaissant jusqu'à environ 400 000 eV. Remarquons qu'alors la création L est impossible. *Il peut donc exister des noyaux stables au sein de leur cortège électronique qui seraient radioactifs s'il n'avaient pas de cortège ou simplement si un de leurs électrons K leur manquait et cela montre à quel point les propriétés des noyaux doivent être liées à la structure du nuage d'électrons qui les enveloppe.*

Le phénomène de création *e* peut enfin devenir important s'il se produit entre un niveau nucléaire fondamental et un niveau excité représentant une transition voisine de 500 000 eV dans le cas où la transition fondamental → fondamental est interdite. Il y a alors augmentation du rapport entre la probabilité de création *e* suivie de l'émission de photon nucléaire et la probabilité d'émission β.

Signalons enfin que l'existence du phénomène de création *e* devrait exclure totalement la possibilité d'existence de deux isobares voisins et dépouillés d'électrons.

Remarque. — Dans l'étude théorique faite jusqu'à présent, on a envisagé la création *e* comme un phénomène du premier ordre. Il est bien évident qu'il y aura lieu d'étudier le phénomène du second ordre, c'est-à-dire par exemple : le saut d'un électron K sur le niveau L, suivi de création K; le principe de conservation de l'énergie n'étant applicable qu'à l'ensemble de ces deux effets supposés s'effectuer simultanément. Disons enfin qu'il y aurait intérêt à étudier, d'une façon analogue, la création mésique.

Nous tenons à remercier bien vivement Mme le Professeur Joliot-Curie et MM. les Professeurs Louis de Broglie et Francis Perrin qui ont bien voulu nous guider par leurs conseils au cours de ce travail et préciser certaines questions.

Manuscrit reçu le 8 juillet 1947.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. Daudel, P. Benoist, R. Jacques et M. Jean, *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **224**, p. 1427.
[2] R. Daudel, *Revue scientifique*, 1947, **85**, p. 162.
[3] E. Segré, *Phys. Rev.*, 1947, **71**, p. 274.
[4] *Voir* [1].
[5] *Cf.* Konopinski et Uhlenbeck, *Phys. Rev.*, 1941, **60**, p. 308.
[6] *Cf.* Bethe, *Handb. der Physik*, XXIV/1, p. 316.
[7] Konopinski, *Rev. of Modern Phys.*, 1943, **15**, p. 216.
[8] M. Lecoin et M. Perey, *C. R. Acad. Sc.*, 1943, **217**, p. 106-108; *Cahiers de Physique*, 1944, **20**, p. 58. — M. Lecoin, M. Perey et Tsien San Tsiang, *Cahiers de Physique*, 1944, **26**, p. 16.

THÉORIE DU CÂBLE COAXIAL (*suite*)

Par F. POLLACZEK.

6. **Solution de quelques problèmes aux limites.** — A l'aide du champ de Green (68), nous établirons facilement les solutions des problèmes aux limites mentionnés dans l'introduction. Considérons d'abord dans l'espace du câble deux champs quelconques $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, et $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$. En vertu des équations (3) auxquelles ces deux champs satisfont en général, le 2ᵉ membre de l'identité

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}_1] - \operatorname{div}[\mathbf{E}_1, \mathbf{H}] \\ &= (\mathbf{H}_1 \operatorname{rot} \mathbf{E}) - (\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}_1) - \big((\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E}_1) - (\mathbf{E}_1 \operatorname{rot} \mathbf{H})\big)\end{aligned}$$

est nul, de sorte que l'on a

$$\operatorname{div}\big([\mathbf{E}, \mathbf{H}_1] - [\mathbf{E}_1, \mathbf{H}]\big) = 0. \qquad (84)$$

Grâce au théorème de Green

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A}\, d\tau = -\int_S A_n\, d\sigma, \qquad (85)$$

où S désigne la surface, de normale intérieure n, qui limite le volume V, il vient ensuite

$$\int_S \big([\mathbf{E}, \mathbf{H}_1]_n - [\mathbf{E}_1, \mathbf{H}]_n\big)\, d\sigma = 0. \qquad (86)$$

En appliquant cette formule à un espace V coupé par des surfaces où les composantes de ces deux champs présentent des discontinuités, il faut, en général, incorporer dans S les deux côtés de ces surfaces sans toutefois tenir compte des surfaces de discontinuité S' de ε, μ, σ; car, dans $[\mathbf{E}, \mathbf{H}_1]_n$ ne figurent que des composantes tangentielles, lesquelles sont continues sur S'.

Appliquons maintenant la dernière formule à la couche

$$0 \leq r < \infty, \qquad 0 \leq z \leq l, \qquad (87)$$

limitée par les plans $S_0\,(z = 0)$ et $S_l\,(z = l)$, et prenons pour $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ un champ électromagnétique qui existe dans cette couche et pour $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$, le champ de Green

$$e^{i\omega t - \gamma z}\overline{\mathbf{E}}^{(\gamma)}(r, r'), \qquad e^{i\omega t - \gamma z}\overline{\mathbf{H}}^{(\gamma)}(r, r'), \qquad (88)$$

selon (68) dont la composante H_φ subit sur la surface (69) la discontinuité (70).

La surface S se composera alors des plans S_0 et S_l et des deux côtés de la surface (69) et nous obtiendrons, en multipliant par $\frac{c}{4\pi} e^{-i\omega t}$,

$$\begin{aligned}\frac{c}{4\pi}\int_{S_0\,S_l} \Big\{ \big[\mathbf{E}(r, z), e^{-\gamma z}\overline{\mathbf{H}}^{(\gamma)}(r, r')\big]_n \\ - \big[e^{-\gamma z}\overline{\mathbf{E}}^{(\gamma)}(r, r'), \mathbf{H}(r, z)\big]_n \Big\}\, 2\pi r\, dr \\ \frac{c\, e^{-i\omega t}}{4\pi}\int_0^l E_z(r', z)\, \Delta H_\varphi\, 2\pi r'\, dz = 0.\end{aligned}$$

Grâce à l'équation (70) et à la notation (74), cette équation prend la forme

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}(0).\overline{\mathbf{H}}^{(\gamma)}(r') - \overline{\mathbf{E}}^{(\gamma)}(r').\mathbf{H}(0) \\ &\quad - e^{-\gamma l}\big(\mathbf{E}(l).\overline{\mathbf{H}}^{(\gamma)}(r') - \overline{\mathbf{E}}^{(\gamma)}(r').\mathbf{H}(l)\big) \\ &= \int_0^l e^{-\gamma z} E_z(r', z)\, dz, \qquad (89)\end{aligned}$$

et en remplaçant γ par $-\gamma$, on a

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}(0).\overline{\mathbf{H}}(r') + \overline{\mathbf{E}}^{(\gamma)}(r').\mathbf{H}(0) \\ &\quad - e^{\gamma l}\big(\mathbf{E}(l).\overline{\mathbf{H}}^{(\gamma)}(r') + \overline{\mathbf{E}}^{(\gamma)}(r').\mathbf{H}(l)\big) \\ &= \int_0^l e^{\gamma z} E_z(r', z)\, dz, \qquad (90)\end{aligned}$$

car puisque $\overline{E}_z^{(\gamma)} = \frac{2i\omega}{c^2} G^{(\gamma)}$ est une fonction paire de γ, les fonctions $\overline{H}_\varphi^{(\gamma)}$ et $\overline{E}_r^{(\gamma)}$ [*voir* (10)] sont respectivement paire et impaire.

Nous utiliserons ces formules en premier lieu pour des γ imaginaires et pour $l = \infty$ où l'on peut supposer

$$\mathbf{E}(\infty) = \mathbf{H}(\infty) = 0; \qquad (91)$$

dans cette hypothèse, on obtient, en ajoutant l'équation (90) à (89),

$$\begin{aligned}&2\mathbf{E}(0).\overline{\mathbf{H}}^{(\gamma)}(r') \\ &= \int_0^\infty e^{\gamma z} E_z(r', z)\, dz + \int_{-\infty}^0 e^{\gamma z} E_z(r', -z)\, dz. \qquad (92)\end{aligned}$$

Le 2ᵉ membre de cette relation est la transformée de Fourier d'une fonction $f(z)$ qui est respectivement égale à $E_z(r', \pm z)$ pour z positif et négatif; en appliquant le théorème de Fourier sous la forme

$$f(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-\gamma z'}\, d\gamma \int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma z} f(z)\, dz, \qquad (93)$$

nous avons donc

$$E_z(r', z') = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-\gamma z'}\, 2\mathbf{E}(0).\overline{\mathbf{H}}^{(\gamma)}(r')\, d\gamma$$

ou, en supprimant les accents des variables r' et z',

$$\left.\begin{aligned} &E_z(r, z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-\gamma z}\,\mathbf{E}(o).\overline{\mathbf{H}}^{(\gamma)}(r)\,d\gamma \\ &(o \leq r < \infty,\ o < z < \infty). \end{aligned}\right\} \quad (94)$$

Pour les autres composantes du champ, on obtient

$$\left.\begin{aligned} &E_r(r, z) = \frac{1}{\pi i}\int_{i-\infty}^{i\infty} e^{-\gamma z}\left(\mathbf{E}(o).\frac{-\gamma}{\varkappa^2}\frac{\partial \overline{\mathbf{H}}^{(\gamma)}(r)}{\partial r}\right)d\gamma, \\ &(\varkappa = \varkappa(r)) \quad (o \leq r < \infty,\ o < z < \infty), \end{aligned}\right\} \quad (95)$$

$$\left.\begin{aligned} &H_\varphi(r, z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-\gamma z}\left(\mathbf{E}(o).\frac{ck^2}{i\omega\mu\varkappa^2}\frac{\partial \overline{\mathbf{H}}^{(\gamma)}(r)}{\partial r}\right)d\gamma, \\ &\left(\frac{k^2}{\mu\varkappa^2} = \frac{k^2}{\mu\varkappa^2}(r)\right) \quad (o \leq r < \infty,\ o < z < \infty); \end{aligned}\right\} \quad (96)$$

ces formules peuvent être déduites de (94) à l'aide des deux premières équations (7) utilisées sous la forme

$$\left.\begin{aligned} &H_\varphi(r, z) = -\frac{1}{r}\int_0^r \frac{ck^2}{i\omega\mu}E_z(\rho, z)\,\rho\,d\rho, \\ &E_r(r, z) = \frac{i\omega\mu}{ck^2}\frac{\partial H_\varphi(r, z)}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \quad (97)$$

Les formules (94) à (96), où il faut poser, d'après (74),

$$\mathbf{E}(o).\overline{\mathbf{H}}^{(\gamma)}(r) = \frac{c}{2}\int_0^\infty E_r(\rho, o)\,\overline{H}_\varphi^{(\gamma)}(\rho, r)\,\rho\,d\rho \quad (98)$$

permettent de calculer le champ d'un câble de longueur infinie (dont la section normale est représentée figure 1) en fonction des valeurs que la composante $E_r(r, z)$ prend sur le plan $z = o$.

Remplaçons maintenant $E_r(r, o)$ [équ. (98)] par une fonction arbitraire, continue par morceaux, $F(r)$ qui ait une dérivée continue (par morceaux) et soit $O\left(\frac{1}{r}\right)$ pour $r \to \infty$; on démontre alors sans difficulté que les fonctions (94) à (96) satisfont toujours pour $z > o$, $o \leq r < \infty$ aux équations et aux conditions supplémentaires de la théorie de Maxwell et que pour $z \to o$, $E_r(r, z)$ tend vers la fonction donnée $F(r)$ partont où celle-ci est continue.

Passons maintenant aux câbles de longueur finie l et prescrivons sur chacun des deux plans qui limitent la couche (87) les valeurs soit de E_r, soit de H_φ; on est conduit ainsi à trois différents types de problèmes aux limites.

Pour exprimer $E_z(r, z)$ par exemple en fonction de $E_r(r, o)$ et de $E_r(r, l)$, additionnons les équations (89) et (90), ce qui élimine les termes en $\mathbf{H}(r, o)$; il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(o).\overline{\mathbf{H}}^{(\gamma)}(r) - \mathbf{E}(l).\mathbf{H}^{(\gamma)}(r)\cosh\gamma l \\ - \overline{\mathbf{E}}^{(\gamma)}(r).\mathbf{H}(l)\sinh\gamma l \\ = \int_0^l \cosh\gamma z'\,E_z(r, z')\,dz'. \end{aligned} \quad (99)$$

Pour résoudre cette équation intégrale pour $E_z(r,z)$, nous utilisons la formule

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon}\frac{2\cosh\gamma(l-z)}{\sinh\gamma l}\,d\gamma \times \int_0^l \cosh\gamma z'\,f(z')\,dz' \quad (o \leq z < l), \quad (100)$$

où $\varepsilon > o$ désigne une grandeur arbitrairement petite; pour des fonctions paires, (100) est une généralisation du théorème de Fourier [équ. (93)].

Admettons, pour la démonstration de (100), que $f(z)$ possède une dérivée continue $f'(z)$, ce qui sera le cas dans nos applications; on a alors, en intégrant par parties,

$$\int_0^l \cosh\gamma z'\,f(z')\,dz' = \frac{\sinh\gamma l}{\gamma}f(l) - \frac{1}{\gamma}\int_0^l \sinh\gamma z'\,f'(z')\,dz'. \quad (101)$$

En intégrant ensuite par rapport à $d\gamma$, on obtient, pour le premier terme de (101),

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{i\infty-\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon}\frac{2\cosh\gamma(l-z)}{\sinh\gamma l}\,\frac{\sinh\gamma l}{\gamma}f(l)\,d\gamma = f(l) \quad (o \leq z < l).$$

Pour intégrer sur l'autre terme de (101), décomposons comme suit

$$\frac{\cosh\gamma(l-z)}{\sinh\gamma l} = \frac{e^{-\gamma(l-z)} + e^{\gamma(z-l)}}{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}} + e^{-\gamma z}$$

et amenons le chemin d'intégration respectivement vers l'infini des demi-plans gauche (pôle en $\gamma = o$) et droit pour la partie $-e^{-\gamma z}\frac{1}{\gamma}\int_z^l e^{\gamma z'} f'(z')\,dz'$ et pour le reste de la fonction à intégrer. Il vient ainsi

$$-\int_z^l f'(z')\,dz' = -f(l) + f(z),$$

et en ajoutant ceci à $f(l)$, on a la formule (100).

Multiplions maintenant l'équation (99) par $\frac{\cosh\gamma(l-z)}{\sinh\gamma l}$ et utilisons l'identité

$$\cosh\gamma l\cosh\gamma(l-z) = \cosh\gamma z + \sinh\gamma l\sinh\gamma(l-z);$$

il vient

$$\begin{aligned} &\frac{\left\{\begin{aligned} &\mathbf{E}(o).\overline{\mathbf{H}}^{(\gamma)}(r)\cosh\gamma(l-z) \\ &\quad -\mathbf{E}(l).\overline{\mathbf{H}}^{(\gamma)}(r)\cosh\gamma z \end{aligned}\right\}}{\sinh\gamma l} \\ &\quad - \mathbf{E}(l).\mathbf{H}^{(\gamma)}(r)\sinh\gamma(l-z) \\ &\quad - \overline{\mathbf{E}}^{(\gamma)}(r).\mathbf{H}(l)\cosh\gamma(l-z) \\ &= \frac{\cosh\gamma(l-z)}{\sinh\gamma l}\int_0^l \cosh\gamma z'\,E_z(r, z')\,dz', \end{aligned} \quad (102)$$

où les deux derniers termes du 1er membre sont des fonctions impaires de γ, régulières sur l'axe

imaginaire, de sorte que l'opération

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon}\ldots d\gamma$$

les annule. Grâce à cette opération et à (100), nous tirons donc de (102) la formule

$$E_z(r,z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon}\frac{\begin{Bmatrix}\mathbf{E}(0).\overline{\mathbf{H}}^{(\gamma)}(r)\cosh\gamma(l-z)\\ -\mathbf{E}(l).\overline{\mathbf{H}}^{(\gamma)}(r)\cosh\gamma z\end{Bmatrix}}{\sinh\gamma l}d\gamma \quad (0\leq r<\infty,\ 0<z<l) \qquad (103)$$

qui permet de calculer la composante axiale $E_z(r, z)$ en fonction des valeurs que la composante radiale E_r prend sur les plans-frontières $z = 0$ et $z = l$.

De manière analogue, on obtient les formules

$$E_z(r,z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon}\frac{\begin{Bmatrix}\overline{\mathbf{E}}^{(\gamma)}(r).\mathbf{H}(0)\sinh\gamma(l-z)\\ +\overline{\mathbf{E}}^{(\gamma)}(r).\mathbf{H}(l)\sinh\gamma z\end{Bmatrix}}{\sinh\gamma l}d\gamma \quad (0\leq r<\infty,\ 0<z<l), \qquad (104)$$

$$E_z(r,z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon}\frac{\begin{Bmatrix}\mathbf{E}(0).\overline{\mathbf{H}}^{(\gamma)}(r)\sinh\gamma(l-z)\\ +\overline{\mathbf{E}}^{(\gamma)}(r).\mathbf{H}(l)\cosh\gamma z\end{Bmatrix}}{\cosh\gamma l}d\gamma \quad (0\leq r<\infty,\ 0<z<l). \qquad (105)$$

$$E_z(r,z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon}\frac{\begin{Bmatrix}\overline{\mathbf{E}}^{(\gamma)}(r).\mathbf{H}(0)\cosh\gamma(l-z)\\ -\mathbf{E}(l).\overline{\mathbf{H}}^{(\gamma)}(r)\sinh\gamma z\end{Bmatrix}}{\cosh\gamma l}d\gamma \quad (0\leq r<\infty,\ 0<z<l), \qquad (106)$$

qui expriment $E_z(r, z)$ respectivement en fonction de $H_\varphi(r, 0)$ et $H_\varphi(r, l)$, de $E_r(r, 0)$ et $H_\varphi(r, l)$ et de $H_\varphi(r, 0)$ et $E_r(r, l)$. Les deux dernières formules se rapportent au même type de problèmes et l'on obtient (106) en remplaçant, dans (105), z par $l - z$, en permutant les arguments 0 et l, et en retournant le sens positif de l'axe des z, ainsi que celui du courant du champ de Green.

Comme précédemment [*voir* (94) à (96)], on passe des formules de E_z à celles de E_r et de H_φ en effectuant, sous le signe $\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon}\int_0^\infty$, respectivement les opérations $\frac{1}{\varkappa^2(r)}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial z}$ et $\frac{ck^2}{i\omega\mu\varkappa^2}(r)\frac{\partial}{\partial r}$; ainsi, on tire par exemple de (103) les formules

$$E_r(r,z)=-\frac{1}{\pi i}\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon}\left(\mathbf{E}(0).\frac{\gamma}{\varkappa^2(r)}\frac{\partial\overline{\mathbf{H}}^{(\gamma)}(r)}{\partial r}\sinh\gamma(l-z)+\mathbf{E}(l).\frac{\gamma}{\varkappa^2(r)}\frac{\partial\overline{\mathbf{H}}^{(\gamma)}(r)}{\partial r}\sinh\gamma z\right)\frac{d\gamma}{\sinh\gamma l} \quad (0\leq r<\infty,\ 0<z<l), \qquad (107)$$

$$H_\varphi(r,z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon}\left(\mathbf{E}(0).\frac{ck^2}{i\omega\mu\varkappa^2}(r)\frac{\partial\overline{\mathbf{H}}^{(\gamma)}(r)}{\partial r}\cosh\gamma(l-z)-\mathbf{E}(l).\frac{ck^2}{i\omega\mu\varkappa^2}(r)\frac{\partial\overline{\mathbf{H}}^{(\gamma)}(r)}{\partial r}\cosh\gamma z\right)\frac{d\gamma}{\sinh\gamma l} \quad (0\leq r<\infty,\ 0<z<l). \qquad (108)$$

Les derniers problèmes sont caractérisés par le fait qu'on détermine le champ **E**, **H** au moyen de conditions aux limites non homogènes; au cours du prochain chapitre, nous traiterons le problème d'exprimer le champ en fonction des valeurs données de $E_r(r, 0)$, une condition aux limites homogène étant, en outre, prescrite sur le plan $z = l$.

7. Développements en séries selon des fonctions propres et des champs propres. — Revenons à l'équation (94) [avec (98)] qui est valable pour le câble de longueur infinie et remplaçons-y $\overline{H}_\varphi^{(\gamma)}$ au moyen de (68) par $G^{(\gamma)}$ en permutant les lettres r et r', donc

$$E_z(r,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\int_0^\infty E_r(r',0)\times\frac{2k^2}{\mu\varkappa^2}\frac{dG^{(\gamma)}(r',r)}{dr'}r'\,dr'\,e^{-\gamma z}\,d\gamma \quad (0\leq r<\infty,\ 0\leq z<\infty). \qquad (109)$$

Déformons le chemin de cette intégrale en une courbe C_d (*fig.* 4) qui contourne sous forme d'un petit cercle le point $\gamma = -ik_4$ (où, en général, la fonction à intégrer sera singulière), épouse ensuite les deux bords d'une partie de la coupure (30) et est complétée par deux demi-droites parallèles à l'axe imaginaire. A la limite, les contributions du

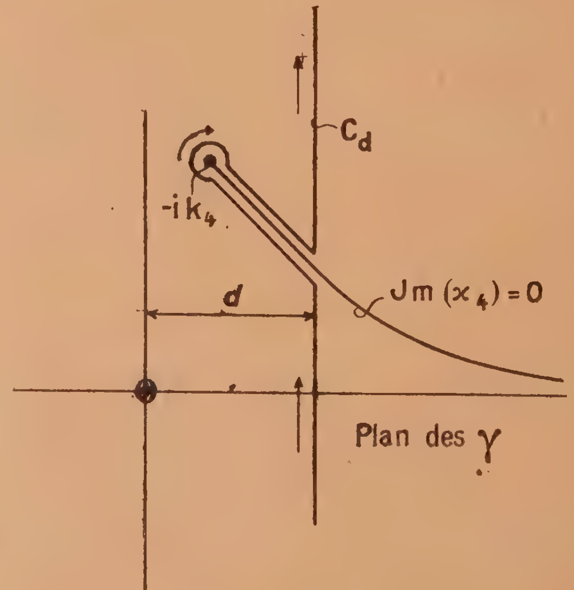


Fig. 4. — Le chemin d'intégration C_d.

petit cercle et des demi-droites à la valeur de l'intégrale sont nulles, de sorte qu'on obtient

$$E_z(r, z) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{Res}\,(\gamma = \gamma_\nu) + \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-ik_4+\varepsilon}^{\infty} \ldots \mathrm{d}\gamma \quad (110)$$

où la somme sera étendue à tous les γ_ν de partie réelle positive du spectre ponctuel et l'intégration, à la branche droite du spectre continu. Ensuite, les propriétés de la fonction (56), mentionnées au Chapitre IV, nous permettent de remplacer $\frac{\partial G^{(\gamma)}(r', r)}{\partial r'}$ par

$$\frac{\mathrm{d}E_z^{(\gamma)}(r')}{\mathrm{d}r'} E_z^{(\gamma)}(r) \frac{A_{21}(\gamma)}{r_1 J_0(\varkappa_1 r_1) D(\gamma)}$$

si bien qu'on a, en supprimant dorénavant le signe $\lim_{\varepsilon=0}$,

$$\begin{aligned} E_z(r, z) = &-\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} E_r(r', 0) \frac{2k^2}{\mu\varkappa^{(\nu)2}} \frac{\mathrm{d}E_z^{(\nu)}(r')}{\mathrm{d}r'} r'\,\mathrm{d}r' \\ &\times \frac{A_{21}(\gamma_\nu)}{r_1 J_0(\varkappa_1^{(\nu)} r_1) D'(\gamma_\nu)} E_z^{(\nu)}(r)\, \mathrm{e}^{-\gamma_\nu z} \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-ik_4}^{\infty} \int_0^{\infty} E_r(r', 0) \frac{2k^2}{\mu\varkappa^2} \frac{\mathrm{d}E_z^{(\gamma)}(r')}{\mathrm{d}r'} r'\,\mathrm{d}r' \\ &\times \Delta\left[\frac{A_{21}(\gamma)}{r_1 J_0(\varkappa_1 r_1) D(\gamma)}\right] E_z^{(\gamma)}(r)\, \mathrm{e}^{-\gamma z}\, \mathrm{d}\gamma. \quad (111) \end{aligned}$$

Cette formule fournit le développement de $E_z(r, z)$ suivant les fonctions propres de l'équation (16), et en traitant les expressions (95) et (96) de la même manière que (94), on obtient les développements analogues de $E_r(r, z)$ et de $H_\varphi(r, z)$.

Grâce aux équations (80) et aux notations (74), (75), (79), la formule (111) et ses analogues prennent la forme

$$\left.\begin{aligned} E_z(r, z) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}(0).\mathbf{H}^{(\nu)}}{\mathbf{E}^{(\nu)}.\mathbf{H}^{(\nu)}} E_z^{(\nu)}(r)\, \mathrm{e}^{-\gamma_\nu z} \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-ik_4}^{\infty} \frac{\mathbf{E}(0).\mathbf{H}^{(\gamma)}}{\int \mathbf{E}^{(\gamma)}.\mathbf{H}^{(\gamma)}} E_z^{(\gamma)}(r)\, \mathrm{e}^{-\gamma z}\, \mathrm{d}\gamma, \quad (112) \\ E_r(r, z) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}(0).\mathbf{H}^{(\nu)}}{\mathbf{E}^{(\nu)}.\mathbf{H}^{(\nu)}} E_r^{(\nu)}(r)\, \mathrm{e}^{-\gamma_\nu z} \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-ik_4}^{\infty} \frac{\mathbf{E}(0).\mathbf{H}^{(\gamma)}}{\int \mathbf{E}^{(\gamma)}.\mathbf{H}^{(\gamma)}} E_r^{(\gamma)}(r)\, \mathrm{e}^{-\gamma z}\, \mathrm{d}\gamma, \quad (113) \\ H_\varphi(r, z) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}(0).\mathbf{H}^{(\nu)}}{\mathbf{E}^{(\nu)}.\mathbf{H}^{(\nu)}} H_\varphi^{(\nu)}(r)\, \mathrm{e}^{-\gamma_\nu z} \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-ik_4}^{\infty} \frac{\mathbf{E}(0).\mathbf{H}^{(\gamma)}}{\int \mathbf{E}^{(\gamma)}.\mathbf{H}^{(\gamma)}} H_\varphi^{(\gamma)}(r)\, \mathrm{e}^{-\gamma z}\, \mathrm{d}\gamma, \\ &(0 \leqq r < \infty,\ 0 < z < \infty). \end{aligned}\right\} \quad (114)$$

L'avant-dernière formule met en évidence que les coefficients de ces développements sont formés à la manière de Fourier; en établissant (113) d'abord avec les mêmes coefficients que (111), on obtiendrait une autre démonstration des équations (80).

Pour développer les formules qui se rapportent au câble de longueur finie, on les traitera de la même manière que (109). Ainsi, on tire par exemple des formules (103), (107), (108) le développement suivant les champs propres

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r, z) = &\sum_{\nu=\pm 1}^{\pm\infty} \frac{\mathrm{e}^{\gamma_\nu l}\mathbf{E}(0).\mathbf{H}^{(\nu)} - \mathbf{E}(l).\mathbf{H}^{(\nu)}}{2\mathbf{E}^{(\nu)}.\mathbf{H}^{(\nu)} \sinh \gamma_\nu l} \mathbf{E}^{(\nu)}(r)\, \mathrm{e}^{-\gamma_\nu z} \\ &+ \left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{-ik_4}^{\infty} + \frac{1}{2\pi i} \int_{ik_4}^{-\infty}\right\} \frac{\mathrm{e}^{\gamma l}\mathbf{E}(0).\mathbf{H}^{(\gamma)} - \mathbf{E}(l).\mathbf{H}^{(\gamma)}}{2\int \mathbf{E}^{(\gamma)}.\mathbf{H}^{(\gamma)} \sinh \gamma l} \mathbf{E}^{(\gamma)}(r)\, \mathrm{e}^{-\gamma z}\, \mathrm{d}\gamma, \quad (115) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{H}(r, z) = &\sum_{\nu=\pm 1}^{\pm\infty} \frac{\mathrm{e}^{\gamma_\nu l}\mathbf{E}(0).\mathbf{H}^{(\nu)} - \mathbf{E}(l).\mathbf{H}^{(\nu)}}{2\mathbf{E}^{(\nu)}.\mathbf{H}^{(\nu)} \sinh \gamma_\nu l} \mathbf{H}^{(\nu)}(r)\, \mathrm{e}^{-\gamma_\nu z} \\ &+ \left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{-ik_4}^{\infty} + \frac{1}{2\pi i} \int_{ik_4}^{-\infty}\right\} \frac{\mathrm{e}^{\gamma l}\mathbf{E}(0).\mathbf{H}^{(\gamma)} - \mathbf{E}(l).\mathbf{H}^{(\gamma)}}{2\int \mathbf{E}^{(\gamma)}.\mathbf{H}^{(\gamma)} \sinh \gamma l} \mathbf{H}^{(\gamma)}(r)\, \mathrm{e}^{-\gamma z}\, \mathrm{d}\gamma \\ &(0 \leqq r < \infty,\ 0 < z < l). \end{aligned}\right\} \quad (116)$$

où la somme sera étendue à tous les points γ_ν et $\gamma_{-\nu} = -\gamma_\nu$ du spectre ponctuel, et l'intégration, aux deux branches du spectre continu.

Le développement des formules des types (104) et (105) ne donne rien de nouveau; d'ailleurs, les coefficients des différents développements sont liés entre eux par les relations

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{E}(0).\mathbf{H}^{(\nu)} - \mathbf{E}^{(\nu)}.\mathbf{H}(0) \\ &\quad - \mathrm{e}^{-\gamma_\nu l}\left(\mathbf{E}(l).\mathbf{H}^{(\nu)} - \mathbf{E}^{(\nu)}.\mathbf{H}(l)\right) = 0. \\ &\mathbf{E}(0).\mathbf{H}^{(\nu)} + \mathbf{E}^{(\nu)}.\mathbf{H}(0) \\ &\quad - \mathrm{e}^{\gamma_\nu l}\left(\mathbf{E}(l).\mathbf{H}^{(\nu)} + \mathbf{E}^{(\nu)}.\mathbf{H}(l)\right) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (117)$$

que l'on établit à l'aide de (86); les mêmes relations ont lieu pour les fonctions propres de 2e espèce.

Posons maintenant le problème de déterminer le champ $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ en fonction de $E_r(r, 0)$ dans l'hypothèse qu'en outre, H_φ satisfasse à la condition aux limites homogène

$$L(H_\varphi) \equiv \sum_{\mu=0}^{m} \alpha_\mu \frac{\partial H_\varphi(r, z)}{\partial z^\mu} = 0 \qquad \text{pour} \quad z = l, \quad (118)$$

où les coefficients complexes α_μ peuvent dépendre de ω, mais non de r.

En introduisant le développement (116) de

manière formelle dans le 1er membre de (118) et en posant

$$L\left(\frac{\mathbf{E}(o).\mathbf{H}^{(\nu)}\cosh\gamma(l-z)-\mathbf{E}(l).\mathbf{H}^{(\nu)}\cosh\gamma z}{\mathbf{E}^{(\nu)}.\mathbf{H}^{(\nu)}\sinh\gamma l}\right)=o$$
$$\text{pour}\quad z=l,$$

pour les coefficients des $H_\varphi^{(\nu)}(r)$ et $H_\varphi^{(\gamma)}(r)$, on obtient une équation linéaire entre $\mathbf{E}(o).\mathbf{H}^{(\nu)}$ et $\mathbf{E}(l).\mathbf{H}^{(\nu)}$ [où entre $\mathbf{E}(o).\mathbf{H}^{(\gamma)}$ et $\mathbf{E}(l).\mathbf{H}^{(\gamma)}$]. Ainsi, on établit le développement

$$E_z(r,z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\mathbf{E}(o).\mathbf{H}^{(\nu)}}{\mathbf{E}^{(\nu)}.\mathbf{H}^{(\nu)}}\,\frac{\sinh\gamma_\nu(l-z)\,\Sigma\alpha_{2\mu}\gamma_\nu^{2\mu}+\cosh\gamma_\nu(l-z)\,\Sigma\alpha_{2\mu+1}\gamma_\nu^{2\mu+1}}{\cosh\gamma_\nu l\,\Sigma\alpha_{2\mu}\gamma_\nu^{2\mu}+\sinh\gamma_\nu l\,\Sigma\alpha_{2\mu+1}\gamma_\nu^{2\mu+1}}E_z^{(\nu)}(r)$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-ik_4}^{\infty}\frac{\mathbf{E}(o).\mathbf{H}^{(\gamma)}}{\int\mathbf{E}^{(\gamma)}.\mathbf{H}^{(\gamma)}}\,\frac{\sinh\gamma(l-z)\,\Sigma\alpha_{2\mu}\gamma^{2\mu}+\cosh\gamma(l-z)\,\Sigma\alpha_{2\mu+1}\gamma^{2\mu+1}}{\cosh\gamma l\,\Sigma\alpha_{2\mu}\gamma^{2\mu}+\sinh\gamma l\,\Sigma\alpha_{2\mu+1}\gamma^{2\mu+1}}E_z^{(\gamma)}(r)\,d\gamma \quad (119)$$

qui satisfait aux conditions imposées pour $z=o$ et $z=l$ et résout, par conséquent, notre problème dans l'hypothèse que les dénominateurs des coefficients ne s'annulent en aucun point du spectre. Ce problème peut être regardé comme une généralisation du problème de la théorie élémentaire d'exprimer le courant et la tension sur un câble en fonction de la tension initiale et de l'impédance terminale.

8. **Valeur du champ à grande distance de la source d'énergie.** — Revenons à nouveau à la formule (109) [ou (94)] du câble de longueur infinie et étudions-la particulièrement pour les grandes valeurs de z. Or, les développements (112) à (114) montrent que pour $z\to\infty$, la partie de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ représentée par des champs propres de 1re espèce est de l'ordre de $e^{-\gamma_1 z}$, où γ_1 est la constante de propagation de partie réelle minimum; mais la partie réelle de

$$-ik_4=\frac{i}{c}\sqrt{\varepsilon_4\mu_4\omega^2-4\pi i\omega\mu_4\sigma_4}\approx\frac{i\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_4\mu_4}+\frac{2\pi\sigma_4}{c}\sqrt{\frac{\mu_4}{\varepsilon_4}}$$

où $\sigma_4\approx o$ désigne la conductibilité du diélectrique extérieur, est plus petite que $Re(\gamma_1)$. Donc, pour $z\to\infty$, l'ordre de grandeur du champ sera déterminé, en raison du facteur $e^{-\gamma z}$, par la partie des intégrales

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{2\pi i}\int_{-ik_4+\varepsilon}^{\infty}\ldots d\gamma$$

provenant de la partie du spectre continu voisine du point $-ik_4$.

Pour développer E_z asymptotiquement pour $z\to\infty$, remplaçons le chemin d'intégration de (109) par une courbe C_d selon la figure 4, et la variable d'intégration par une nouvelle variable

$$\zeta=\gamma+ik_4 \quad (120)$$

qui est petite dans un voisinage de $\gamma=-ik_4$; la distance d sera choisie suffisamment petite pour que, sur la partie « horizontale » de C_d, la fonction à intégrer

$$\int_0^{\infty}E_r(r',o)\frac{2k^2}{\mu\varkappa^2}\Delta\frac{\partial G^{(\gamma)}(r',r)}{\partial r'}r'\,dr'$$
$$=\int_0^{\infty}E_r(r',o)\frac{2k^2}{\mu\varkappa^2}\frac{dE_z^{(\gamma)}(r')}{dr'}r'\,dr'$$
$$\times E_z^{(\gamma)}(r)\Delta\frac{A_{21}(\gamma)}{r_1J_0(\varkappa_1r_1)D(\gamma)} \quad (121)$$

puisse être développée en une série suivant les fonctions

$$\zeta^{\mu+1}\log^\nu\zeta\quad(\mu,\nu=o,1,\ldots). \quad (122)$$

On démontre ensuite sans difficulté que la contribution des parties verticales de C_d à $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_d}$ est de l'ordre de e^{-zd}, donc négligeable, et que le développement asymptotique de (109) est obtenu en intégrant, dans chaque terme du développement de (121) suivant les fonctions (122), multiplié par $e^{-\gamma z}$, depuis $\zeta=o$ jusqu'à $\zeta=\infty$.

Nous calculerons maintenant le premier terme de ce développement. Avec (120), on a, dans un voisinage de $\gamma=-ik_4$,

$$\varkappa_4^2=\gamma^2+k_4^2=\zeta(-2ik_4+\zeta)=O(\zeta) \quad (123)$$
$$\text{pour}\quad\zeta\to o;$$

ensuite, on a à l'aide des équations (66), (32), (34) pour le dernier facteur de (121),

$$\Delta\frac{A_{21}(\gamma)}{r_1J_0(\varkappa_1r_1)D(\gamma)}$$
$$=\frac{d_2^2d_3^2d_4}{r_3D(\gamma)D^\star(\gamma)}$$
$$=-\frac{i\pi\mu_4d_2^2d_3^2}{k_4^2A_{66}^2(\gamma)}\varkappa_4^2+O(\varkappa_4^4\log\varkappa_4)$$
$$=-\frac{2\pi\mu_4}{k_4}\left[\frac{d_2^2d_3^2}{A_{66}^2}\right]_{\gamma=-ik_4}\zeta+O(\zeta^2\log\zeta). \quad (124)$$

Il s'agit maintenant de développer, pour $\zeta\to o$, l'intégrale qui figure dans le 2e membre de (121), ce qui ne présente aucune difficulté dans le cas où

$$E_r(r,o)=o\quad\text{pour}\quad r>R_0, \quad (125)$$

car la fonction $E_z^{(\gamma)}(r)$, selon (25), (28) est régulière en $\gamma=-ik_4$; mais au lieu de (125), nous admettrons, dans ce qui suit, une hypothèse moins restrictive qui ne porte que sur la fonction primitive de $E_r(r,o)$.

Dans le cas général, la partie $\int_{R_0}^{\infty}\ldots dr'$ de l'intégrale en question prend, grâce à la 4e équation (25) et à (33), la forme

$$\int_{R_0}^{\infty}\ldots dr=\frac{i\pi r_3}{2d_2d_3}\int_{R_0}^{\infty}\frac{d}{dr}\Big(H_0^{(1)}(\varkappa_4r)D^\star(\gamma)$$
$$+H_0^{(2)}(\varkappa_4r)D(\gamma)\Big)E_r(r,o)r\,dr. \quad (126)$$

Posons

$$V(r)=\int_{r}^{\infty}E_r(r',\,o)\,\mathrm{d}r' \qquad (127)$$

et supposons que les limites

$$\left.\begin{aligned}&W(r)=\lim_{\varkappa\to 0}\int_{r}^{\infty}V(r')r'J_0(\varkappa r')\,\mathrm{d}r'\\ \text{et}\\ &\lim_{\varkappa\to 0}\int_{r}^{\infty}V(r')r'\left(N_0(\varkappa r')-\frac{2}{\pi}J_0(\varkappa r')\log\varkappa r'\right)\mathrm{d}r'\end{aligned}\right\}\qquad (128)$$

existent, hypothèse qui est satisfaite par exemple dans le cas où $E_r(r,\,o)$ admet pour les grandes valeurs de r le développement suivant (convergent ou asymptotique)

$$E_r(r,\,o)\sim e^{ik_4 r}\left(\frac{c_0}{r}+\frac{c_1}{r^2}+\dots\right)\qquad \text{pour}\quad r\to\infty. \quad (129)$$

Ecrivons en outre

$$\left.\begin{aligned}&\varkappa_\nu^{\backslash},\quad d_\nu^{\backslash},\quad E_z^{\backslash}(r),\quad \dots\\ \text{au lieu de}\\ &[\varkappa_\nu]_{\gamma=-ik_4}=\sqrt{k_\nu^2-k_4^2},\\ &[d_\nu]_{\gamma=-ik_4}=\frac{4ik_\nu^2}{\pi\mu_\nu r_{\nu-1}(k_\nu^2-k_4^2)},\quad E_z^{(-ik_4)}(r),\quad \dots\end{aligned}\right\}\qquad (130)$$

en supposant que $\varkappa_\nu\neq o$, $\nu=1,\,2,\,3$; nous obtenons alors, à l'aide de (34) et de (128), au moyen d'un calcul simple,

$$\int_{R_0}^{\infty}\dots\,\mathrm{d}r=-\frac{2k_4^2}{\mu_4 d_2 d_3}A_{66}^{\backslash}W(R_0)+O(\zeta)$$

pour l'intégrale (126), et

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty}\dots\,\mathrm{d}r=&\int_{0}^{R_0}E_r(r,\,o)\frac{2k^2}{\mu\varkappa^2}\frac{\mathrm{d}E_z^{\backslash}(r)}{\mathrm{d}r}r\,\mathrm{d}r\\ &-\frac{2k_4^2}{\mu_4 d_2 d_3}A_{66}^{\backslash}W(R_0)+O(\zeta)\end{aligned}\qquad (131)$$

pour l'intégrale qui figure dans (121).

A l'aide des formules (124) et (131), nous voyons que le développement de (121) suivant les fonctions (122) est de la forme

$$a\zeta+b\zeta^2\log\zeta+O(\zeta^3)\qquad \text{pour}\quad \zeta\to o;$$

d'après ce qui a été exposé plus haut, le développement asymptotique de (109) commence donc par

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}(a\zeta+b\zeta^2\log\zeta)\,e^{-z(\zeta-ik_4)}\,\mathrm{d}\zeta\\ &=\frac{a}{2\pi i}\frac{e^{ik_4 z}}{z^2}+\frac{b\,e^{ik_4 z}}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}e^{-z\zeta}\zeta^2\log\zeta\,\mathrm{d}\zeta\\ &=\frac{a}{2\pi i}\frac{e^{ik_4 z}}{z^2}\left[1+O\left(\frac{\log z}{z}\right)\right].\end{aligned}$$

On obtient ainsi la formule

$$\begin{aligned}E_z(r,\,z)=E_z^{\backslash}(r)\frac{e^{ik_4 z}}{(k_4 z)^2}&\left(\frac{ik_4\mu_4 d_2^{\backslash 2}d_3^{\backslash 2}}{A_{66}^{\backslash 2}}\int_{0}^{R_0}E_r(r,\,o)\frac{2k^2}{\mu(k^2-k_4^2)}\frac{\mathrm{d}E_z^{\backslash}(r)}{\mathrm{d}r}r\,\mathrm{d}r\right.\\ &\left.-\frac{2ik_4^3 d_2 d_3}{A_{66}^{\backslash}}W(R_0)\right)\left[1+O\left(\frac{\log z}{z}\right)\right]\qquad \text{pour}\quad z\to\infty,\end{aligned}\qquad (132)$$

où $W(R_0)$ et $d_\nu^{\backslash}$ sont respectivement donnés par les équations (127), (128) et (130) et où $A_{66}^{\backslash}$ est le mineur de l'élément a_{66} de la matrice (29), formé pour $\gamma=-ik_4$. Pour obtenir les formules correspondantes de $E_r(r,\,z)$ et $H_\varphi(r,\,z)$, on remplacera, dans le 2e membre de (132), le facteur $E_z^{\backslash}(r)$ respectivement par $E_r^{\backslash}(r)$ et par $H_\varphi^{\backslash}(r)$. La dernière formule montre que pour les grandes valeurs de z, les composantes du champ sont proportionnelles à $\frac{e^{ik_4 z}}{(k_4 z)^2}$, donc [*voir* (12)], avec les valeurs $\varepsilon_4=\mu_4=1$, $\sigma=o$ pour les constantes du diélectrique extérieur, de $\dfrac{e^{-\frac{i\omega z}{c}}}{\left(\frac{\omega z}{c}\right)^2}$.

Appliquons maintenant la formule (132) à un câble auquel est imposé, dans le plan $z=o$, le champ électrique radial

$$E_r(r,\,o)=\begin{cases}\dfrac{V_0\,e^{i\omega t}}{\log\dfrac{r_2}{r_1}}\,\dfrac{1}{r} & \text{pour}\quad r_1<r<r_2,\\ o & \text{ailleurs.}\end{cases}\qquad (133)$$

Ce champ sera produit par un condensateur cylindrique selon la figure 5, entre les plaques duquel existe la tension $V_0 e^{i\omega t}$, car le champ électrique E_r du condensateur cylindrique est de la forme const. $\frac{1}{r}$ et en déterminant cette constante selon (133), on a

$$\int_{r_1}^{r_2}E_r(r,\,o)\,\mathrm{d}r=V_0\,e^{i\omega t}.$$

Pour la fonction (133), l'intégrale qui figure dans (132) devient égale au produit des grandeurs $\frac{2k_2^2}{\mu_2\varkappa_2^{\backslash 2}}\,\frac{V_0\,e^{i\omega t}}{\log\frac{r_2}{r_1}}$ et [*voir* (25)]

$$\begin{aligned}&\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}E_z^{\backslash}(r)}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r\\ &=E_z^{\backslash}(r_2)-E_z^{\backslash}(r_1)\\ &=a_1^{\backslash}H_0^{(1)}(\varkappa_2^{\backslash}r_2)+a_2^{\backslash}H_0^{(2)}(\varkappa_2^{\backslash}r_2)-J_0(\varkappa_1^{\backslash}r_1)\end{aligned}\qquad (134)$$

et l'on a ainsi, par exemple, pour $E_r(r,\,z)$

$$\begin{aligned}E_r(r,\,z)\approx E_r^{\backslash}(r)\,&\frac{V_0\,e^{i\omega t}}{\log\frac{r_2}{r_1}}\,\frac{e^{ik_4 z}}{(k_4 z)^2}\,\frac{ik_4\mu_4 d_2^{\backslash 2}d_3^{\backslash 2}}{A_{66}^{\backslash 2}}\,\frac{2k_2^2}{\mu_2\varkappa_2^{\backslash 2}}\\ &\times\left(a_1^{\backslash}H_0^{(1)}(\varkappa_2^{\backslash}r_2)+a_2^{\backslash}H_0^{(2)}(\varkappa_2^{\backslash}r_2)-J_0(\varkappa_2^{\backslash}r_2)\right).\end{aligned}\qquad (135)$$

De cette formule, on tire la valeur asymptotique de la tension entre les deux conducteurs, donc de

$$V_{r_1}^{r_2}(z) = \int_{r_1}^{r_2} E_r(r, z)\,\mathrm{d}r, \qquad (136)$$

en y remplaçant $E_r^{\backprime}(r)$ [*voir* (10) et (134)] par

$$\int_{r_1}^{r_2} E_r^{\backprime}(r)\,\mathrm{d}r = \frac{ik_4}{\varkappa_2^{\backprime 2}}\,[E_z^{\backprime}(r)]_{r_1}^{r_2}.$$

On obtient ainsi

$$V_{r_1}^{r_2}(z) \approx \frac{V_0\,\mathrm{e}^{i\omega t + ik_4 z}}{(k_4 z)^2}\cdot\frac{-2k_2^2\mu_4 d_3^{\backprime 2}}{k_4^2\mu_2\log\dfrac{r_2}{r_1}}$$
$$\times\left[\frac{\left\{\begin{array}{l} d_2^{\backprime}\Big(a_1^{\backprime}H_0^{(1)}(\varkappa_2^{\backprime} r_2) \\ \qquad + a_2^{\backprime}H_0^{(2)}(\varkappa_2^{\backprime} r_2) - J_0(\varkappa_1^{\backprime} r_1)\Big)\end{array}\right\}}{\varkappa_2^{\backprime 2}\,k_2^{-2}A_{66}^{\backprime}}\right]^2 \qquad (137)$$

où $a_1^{\backprime}$ et $a_2^{\backprime}$ se calculent au moyen des deux premières équations (28).

Admettons, à titre d'exemple, pour les constantes du câble les valeurs suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}
\text{pour l'isolant,} \\
\varepsilon_2 = \mu_2 = 1, \quad \sigma_2 = 0, \quad \text{donc} \quad k_2 = k_4, \quad \varkappa_2^{\backprime} = 0; \\
\text{pour les deux conducteurs,} \\
\varepsilon_1 = \mu_1 = \varepsilon_3 = \mu_3 = 1, \quad \sigma_1 = \sigma_3 = \sigma, \\
\text{donc} \quad k_1 = k_3 = k = \sqrt{\dfrac{-4\pi i\omega\sigma}{c^2}}
\end{array}\right\} \qquad (138)$$

et attribuons à ω une telle valeur que les inégalités

$$\left.\begin{array}{c}
(k_2 r_\nu)^2 = \left(r_\nu\dfrac{\omega}{c}\right)^2 \ll 1, \\
|kr_\nu| = r_\nu\sqrt{4\pi\omega\dfrac{\sigma}{c^2}} > 4 \\
(\nu = 1, 2, 3)
\end{array}\right\} \qquad (139)$$

soient satisfaites; ainsi, les fonctions cylindriques de $\varkappa_1^{\backprime} r_\nu \approx kr_\nu$ et de $k_3^{\backprime} r_\nu \approx kr_\nu$ pourront être remplacées, dans (137), par les expressions approchées (23).

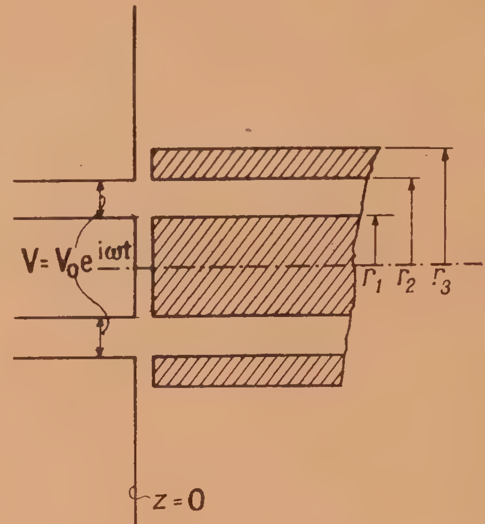


Fig. 5. — Production du champ électrique initial $E_r(r, 0)$ selon (133).

Faisons d'abord tendre, dans (137), $\varkappa_2^{\backprime}$ vers zéro; on obtient

$$\lim_{\varkappa_2^{\backprime}=0} d_2^{\backprime}\Big(a_1^{\backprime}H_0^{(1)}(\varkappa_2^{\backprime} r_2) + a_2^{\backprime}H_0^{(2)}(\varkappa_2^{\backprime} r_2) - J_0(\varkappa_1^{\backprime} r_1)\Big)$$
$$= \frac{4i}{\pi}\left[\frac{k_2^2}{2\mu_2}J_0(\varkappa_1^{\backprime} r_1)\left(r_1\log\frac{r_2}{r_1} - \frac{r_2^2 - r_1^2}{2r_1}\right) - \varrho_1^{\backprime}J_1(\varkappa_1^{\backprime} r_1)\log\frac{r_2}{r_1}\right], \qquad (140)$$

$$\lim_{\varkappa_2^{\backprime}=0}\varkappa_2^{\backprime 2}k_2^{-2}A_{66}^{\backprime} = -\frac{4i}{\pi\mu_2 r_1}\begin{vmatrix}
J_0(\varkappa_1^{\backprime} r_1) & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & H_0^{(1)}(\varkappa_3^{\backprime} r_2) & H_0^{(2)}(\varkappa_3^{\backprime} r_2) \\
-\dfrac{r_1}{r_2}\varrho_1^{\backprime}J_1(\varkappa_1^{\backprime} r_1) & \dfrac{k_2^2(r_2^2 - r_1^2)}{2\mu_2 r_2} & \varrho_3^{\backprime}H_1^{(1)}(\varkappa_3^{\backprime} r_2) & \varrho_3^{\backprime}H_1^{(2)}(\varkappa_3^{\backprime} r_2) \\
0 & 0 & H_0^{(1)}(\varkappa_3^{\backprime} r_3) & H_0^{(2)}(\varkappa_3^{\backprime} r_3)
\end{vmatrix}. \qquad (141)$$

En raison des inégalités (139), ces expressions prennent respectivement les valeurs approchées

$$\frac{2k\,\mathrm{e}^{-ir_1 k}}{\pi\sqrt{\dfrac{\pi r_1 k}{2i}}}\log\frac{r_2}{r_1} \quad \text{et} \quad -\frac{4\,\mathrm{e}^{-ik(r_1 + r_3 - r_2)}}{\pi^2\sqrt{\dfrac{\pi k}{2i}}}\,\frac{r_1 + r_2}{\sqrt{r_1 r_2 r_3}},$$

de sorte que nous obtenons enfin, pour la tension (137), la formule approximative

$$\left.\begin{array}{l}
V_{r_1}^{r_2}(z) \approx \dfrac{V_0\,\mathrm{e}^{i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)}}{\left(\dfrac{\omega z}{c}\right)^2}\,\dfrac{8k^2 r_1^2 r_2 r_3}{(r_1 + r_2)^2}\log\dfrac{r_2}{r_1}\,\mathrm{e}^{2ik(r_3 - r_2)} \\
\qquad \text{pour} \quad \dfrac{\omega z}{c} \gg 1,
\end{array}\right\} \qquad (142)$$

où les tensions $V_{r_1}^{r_2}(z)$ et V_0 seront exprimées en volts et les longueurs r_ν et k^{-1} en centimètres. La conductibilité σ qui figure dans $k = \sqrt{\dfrac{-4\pi i\omega\sigma}{c^2}}$, se ramène à la résistance spécifique ρ (en $\Omega\times\mathrm{mm}^2$: m) des conducteurs au moyen de la formule $\sigma = \dfrac{c^2}{10^5\rho}$ (²);

(²) La résistance spécifique est égale à
ρ (en $\Omega\times\mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$) $= 10^{-4}\rho$ (en $\Omega\times\mathrm{cm}$)
$10^{-4}.10^9\rho$ (en unités électromagnétiques C. G. S.)
$= \dfrac{10^5\rho}{c^2}$ (en unités électrostatiques C.G.S.);

donc, la conductibilité est égale à $\dfrac{c^2}{10^5\rho}$ (en unités électrostatiques C. G. S.).

avec la valeur $\rho_{Cu} = \frac{1}{57}$, on a alors

$$k^{[\mathrm{cm}^{-1}]} \approx (-1 + i)\, 0{,}15 \sqrt{\nu^{[\mathrm{sec}^{-1}]}}, \qquad (143)$$

$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ étant la fréquence de la tension imposée.

On peut enfin établir la valeur asymptotique du champ en un point de l'espace aux coordonnées

$$r = R \sin\Theta, \qquad z = R\cos\Theta \qquad \left(0 < \Theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

qui se trouve à grande distance R de la source d'énergie. En traitant, dans cette hypothèse, les formules du champ du câble de longueur infinie au moyen de la méthode dite « du col », on obtient $\left[\text{le col correspondant au point } \gamma = \frac{i\omega}{c}\cos\theta\right]$ pour les composantes des expressions de la forme

$$\left.\begin{array}{l} E_z \sim C(\Theta)\sin^2\Theta \dfrac{e^{i\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)}}{R} \\ E_r \sim -\cot\theta\, E_z, \qquad H_{\varphi} \sim \dfrac{1}{\sin\theta} E_z \\ \text{pour} \quad R \to \infty; \end{array}\right\} \qquad (144)$$

ici, $C(\Theta)$ désigne une fonction continue de Θ qui ne s'annulle pas pour $\Theta \to 0$.

Notons finalement que pour établir la théorie du câble coaxial, nous avons utilisé de préférence la composante *axiale* E_z du champ *électrique*, ainsi que le champ de Green [équ. (68)] qui est engendré par une nappe de *courant électrique* sinusoïdal qui s'écoule en direction *axiale* le long de la surface $r = r'$. Cependant, nous aurions tout aussi bien pu prendre comme point de départ une formule qui donne la composante *radiale* E_r du champ électrique au moyen d'un champ de Green qui est engendré par une « nappe » de courant électrique située dans la même surface, mais étant de direction *radiale*. Enfin, nous aurions aussi pu partir d'une formule qui exprime la composante H_φ au moyen d'un champ de Green qui est engendré par un flux magnétique sinusoïdal (de pulsation ω) qui s'écoule dans la surface $r = r'$ en direction *périphérique*. Dans un autre ordre d'idées, on pourrait fonder la théorie directement, sans l'intermédiaire de fonctions de Green, sur les développements en séries de fonctions orthogonales; en outre, on pourrait aborder la théorie par l'étude des transformées de Fourier, par rapport à z, des composantes du champ **E**, **H** (calcul « symbolique »).

Manuscrit reçu le 27 mars 1947.

SUR LE COMPORTEMENT D'UN RÉSEAU DE FILS FERROMAGNÉTIQUES DANS LE DOMAINE DES ONDES CENTIMÉTRIQUES

Par I. EPELBOIM,

Laboratoire d'Enseignement de Physique à la Sorbonne.

Sommaire. — La notion de perméabilité magnétique complexe permet, dans le cas des phénomènes électromagnétiques sinusoïdaux, de généraliser aux ferromagnétiques la théorie élémentaire d'un réseau de Hertz. Les mesures sur de tels réseaux ont permis à V. Arkadiev d'obtenir il y a plus de vingt ans l'allure de la variation de la perméabilité aux ondes centimétriques. Le comportement des ferromagnétiques est alors lié à la structure des domaines de Weiss superficiels et à un phénomène de relaxation dû à la fréquence de Larmor du spin. Mais l'étude approfondie des ferromagnétiques aux ondes centimétriques n'est qu'à ses débuts et elle est actuellement en plein développement, étant donné l'intérêt à la fois théorique et technique de cette question.

Introduction. — Pour prouver la polarisation des ondes électromagnétiques, Hertz a utilisé un réseau de fils métalliques (réseau de Hertz), dont la description et les propriétés sont données dans les ouvrages classiques de Physique.

Les bases théoriques de ces réseaux ont été développées depuis longtemps par de nombreux chercheurs, tout particulièrement par R. Gans, qui cependant n'a établi sa théorie que dans le cas des réseaux amagnétiques. Cette théorie a pu être généralisée aux réseaux en fils ferromagnétiques, grâce à la notion de perméabilité complexe introduite par V. Arkadiev.

La vérification expérimentale de ces résultats est délicate. Pourtant, l'étude de tels réseaux est importante, afin de connaître, d'une part, les possibilités d'application des matériaux ferromagnétiques dans la technique de la détection électromagné-

tique, et d'autre part, leur comportement dans le domaine des ondes centimétriques. C'est pourquoi nous donnons un aperçu d'ensemble de cette question, dont la mise au point nécessite encore une étude expérimentale et théorique approfondie, et sur laquelle nous pensons revenir prochainement.

La théorie de Gans [1]. — Soit un réseau de Hertz constitué de fils parallèles, équidistants et infiniment longs, la distance a entre deux fils étant grande par rapport à leur rayon r, mais petite par rapport à la longueur d'onde λ. L'étude de Gans revient à calculer les coefficients de réflexion, d'absorption, et de transmission, R, A et T.

La puissance totale reçue par le réseau sous l'incidence nulle étant désignée par P_i, les trois coefficients sont définis par

$$R = \frac{P_r}{P_i}, \qquad A = \frac{P_a}{P_i}, \qquad T = \frac{P_t}{P_i},$$

où P_r, P_a et P_t désignent respectivement la puissance réfléchie, absorbée et transmise par le réseau. Comme l'on a

$$P_i = P_r + P_a + P_t,$$

on peut écrire

$$R + A + T = 1. \tag{1}$$

En partant des équations de Maxwell, et en faisant plusieurs approximations dont la discussion sort du cadre de cet article, Gans [1] a montré que les trois coefficients peuvent se mettre sous la forme

$$\left.\begin{array}{l} R = \dfrac{1}{u^2+(1+v)^2}, \quad A = \dfrac{u^2+v^2}{u^2+(1+v)^2}, \\ T = \dfrac{2v}{u^2+(1+v)^2}, \end{array}\right\} \tag{2}$$

Pour les fils amagnétiques, les valeurs de u et v se calculent à l'aide des fonctions de Bessel, à partir de la résistivité ρ du métal et des éléments r, a et λ du réseau, dans le cas de fils parallèles au vecteur électrique, comme dans celui de fils parallèles au vecteur magnétique. Il y a plus de vingt ans, ces formules ont été vérifiées d'une manière satisfaisante par rapport à la précision des mesures. Pour fixer les idées, voici quelques résultats obtenus par Schaefer [2] aux ondes de 27 cm :

	R pour 100.		T pour 100.		A pour 100.	
Matière.	obs.	calc.	obs.	calc.	obs.	calc.
Argent	63,6	73,0	34,2	25,7	2,2	1,3
Platine	60,5	70,5	33,0	25,8	6,5	3,7
Manganèse....	57,4	65,0	31,8	24,5	10,8	10,5

La notion de perméabilité complexe. — Si les réseaux contiennent des ferromagnétiques, la question se complique par l'existence, même aux ondes centimétriques, d'une perméabilité supérieure à l'unité et d'un déphasage entre l'induction et le champ magnétique. Mais, dans le cas des phénomènes sinusoïdaux, ce problème peut être résolu à l'aide de la notion de perméabilité complexe $\mu - j\rho'$ introduite par V. Arkadiev [3]. Cet auteur a tenu compte du déphasage qui existe entre l'induction et le champ $b = \frac{\rho'}{\mu}$ dans les ferromagnétiques, une fois l'effet pelliculaire éliminé à l'aide des équations de Maxwell, rendues symétriques en remplaçant la perméabilité constante par la perméabilité complexe.

Au cours d'une étude sur la validité de la loi d'aimantation de Rayleigh dans les champs alternatifs faibles [4], nous avons montré que les phénomènes sont sinusoïdaux pour de faibles accroissements de la perméabilité par rapport à la perméabilité initiale, car il suffit que l'induction soit sinusoïdale pour que le champ le soit aussi, et inversement. D'ailleurs, même aux fréquences musicales, cet accroissement de la perméabilité diminue, pour un champ donné, avec l'augmentation de la fréquence. Des mesures plus récentes, que nous avons effectuées en partie au Laboratoire national de Radioélectricité sur des noyaux toriques en haute fréquence (provisoirement jusqu'à 25 Mcs), à l'aide d'un circuit à résonance de tension, et d'un jeu de bobines démontables [5] et [6] nous ont montré l'absenec, en haute fréquence, de cet accroissement de la perméabilité, dans le domaine des champs considérés. Nous avons pu faire cette vérification également à 10 cm de longueur d'ondes à l'aide d'une ligne coaxiale réalisée par M. P. Abadie [P. Abadie et I. Epelboïm (inédit)].

Ainsi, la notion de perméabilité complexe peut être admise, indépendamment de l'ensemble de la théorie magnétodynamique de V. Arkadiev, dont la vérification nécessite l'étude, dans l'échelle des ondes hertziennes, de la variation des propriétés ferromagnétiques en fonction de la structure et de l'état de surface de l'échantillon.

L'introduction de l'expression de la perméabilité complexe dans les équations de Maxwell, permet de calculer l'effet de peau, notamment par le calcul des quatre coefficients

$$A_e = \frac{R'_e}{R}, \qquad B_e = \frac{L'_e}{R_e}, \qquad A_m = \frac{R'_m}{R_m}, \qquad B_m = \frac{L'_m}{R_m}, \tag{3}$$

où R'_e et R'_m ainsi que L'_e et L'_m sont respectivement les résistances et les self-inductances électriques et magnétiques dans les champs sinusoïdaux, tandis que R_e et R_m sont respectivement les résistances dans les champs continus électriques et magnétiques.

Dans le cas des fils, les quatre coefficients sont reliés par l'expression

$$A_e + jB_e = (1 - jb)[A_m + jB_m] = \frac{1}{2}\xi\frac{J_0(\xi)}{J_1(\xi)}. \tag{4}$$

où J_0 et J_1 sont les fonctions de Bessel et où ξ est

égal à $x\sqrt{8}\sqrt{-(j+b)}$, x étant le paramètre de Zenneck caractéristique de l'effet de peau dans les fils

$$x = \pi r\sqrt{\mu\sigma f}.$$

σ, conductibilité électrique;
f, fréquence.

Il est évident que pour les matériaux isotropes et ne possédant pas de traînage magnétique ($b = 0$), on a

$$A_e = A_m = A \quad \text{et} \quad B_e = B_m = B.$$

Il n'y a pas lieu de rappeler ici les diverses perméabilités effectives. Leurs définitions, en fonction de l'angle de pertes ou des coefficients des équations (3), sont les mêmes que celles indiquées par ailleurs dans le cas des rubans [4].

Remarquons cependant qu'en très haute fréquence, on désigne par μ_R la perméabilité obtenue à partir des caractéristiques dites consomptives qui font intervenir la résistance, et par μ_L la perméabilité obtenue à partir des caractéristiques dites conservatives ou réactives, qui font intervenir la self-inductance. Pour ces fréquences, et tout particulièrement dans le domaine des ondes centimétriques, le paramètre caractéristique de l'effet de peau $x \gg 1$, et, d'après les équations (4), on a

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \frac{x\sqrt{M-b}}{M} \quad \text{et} \quad B_m = \frac{x\sqrt{M+b}}{M}; \\ \text{où} \quad M &= \sqrt{1+b^2}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Toujours dans les mêmes conditions, il existe une relation simple entre la perméabilité complexe et les perméabilités μ_R et μ_L

$$\mu = \sqrt{\mu_R\mu_L} \quad \text{et} \quad \rho' = \frac{\mu_R - \mu_L}{2}. \quad (6)$$

Réseaux et fils ferromagnétiques. — L'introduction de la perméabilité complexe dans les équations de Maxwell, permet de généraliser la théorie de R. Gans au cas d'un réseau en fils ferromagnétiques.

V. Arkadiev a entrepris ce calcul en 1924 [7], pour les réseaux dont les fils sont parallèles au vecteur électrique. Il a trouvé pour les deux fonctions u et v

$$u = \frac{2a}{\lambda}\,\mathrm{Ln}\,\frac{a}{2\pi r} + hB_e \quad \text{et} \quad v = hA_e \quad (7)$$

où $h = \dfrac{aR_e}{2\pi c}$;
R_e, résistance du fil;
c, vitesse de la lumière.

Dans le cas d'un réseau dont la distance a entre les fils est petite, h devient petit également, et l'on peut négliger u^2 et v^2 par rapport à $1 + 2v$ dans l'expression (2) du coefficient de réflexion. On a donc

$$R \sim \frac{1}{1+2v}$$

et comme d'après les relations (3), on a

$$hA_e = \frac{hR'_e}{R_e} = \frac{aR'_e}{2\pi c}$$

on déduit

$$R \sim 1 - \frac{aR'_e}{\pi c}. \quad (8)$$

On peut montrer à partir de cette formule, l'analogie entre R et le coefficient de réflexion des ondes électromagnétiques à partir d'un miroir massif ou d'une plaque mince. D'autre part, l'application de la formule (8) dans le cas d'un réseau ferromagnétique, et dans celui d'un réseau amagnétique constitue une méthode de détermination de la perméabilité μ_R qui jusqu'à maintenant n'a pas été vérifiée par suite de difficultés techniques.

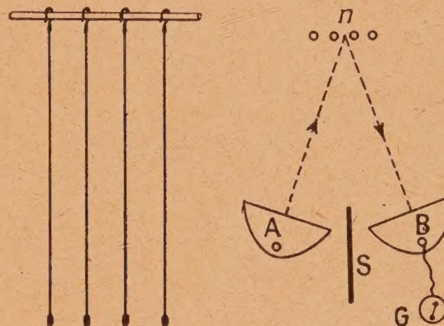


Fig. 1. — Dispositif de mesure du coefficient relatif de réflexion d'un réseau de Hertz (n) constitué de quatre fils pouvant coulisser le long d'une tige en verre. L'émetteur A et le détecteur B sont séparés par un écran S et placés dans des miroirs paraboliques.

Par contre, V. Arkadiev [8] a réussi à effectuer des mesures sur des réseaux ferromagnétiques dont la distance a entre les fils était grande. Il avait mesuré le coefficient relatif de réflexion rapport entre le coefficient de réflexion R du réseau à étudier et le coefficient de réflexion R_0 d'un réseau de référence de résistance nulle. D'après les équations (6), on a, pour un tel réseau,

$$v = 0 \quad \text{et} \quad u = u_0 = \frac{2a}{\lambda}\,\mathrm{Ln}\,\frac{a}{2\pi r}.$$

D'où l'on déduit

$$\frac{R}{R_0} = 1 - \frac{KR_0}{1+KR_0},$$
$$K = 2h(A_e + u_0B_e) + h^2(A_e^2 + B_e^2). \quad (9)$$

Avant de donner des détails sur la vérification expérimentale de ces équations, il est intéressant de mentionner l'étude récente de O. Kozinetz [9]

sur la réflexion des ondes électriques sur un réseau dont les fils sont parallèles au vecteur magnétique. En suivant la méthode de V. Arkadiev, cet auteur a pu vérifier les formules (2) de Gans, et il a trouvé les valeurs suivantes pour les fonctions u et v :

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{2a}{\lambda} \ln \frac{a}{2\pi r} - h A_m, \\ v &= h B_m \quad \text{où} \quad h = \frac{a\lambda}{\pi^2 r \mu}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Ces formules permettent de calculer les coefficients de réflexion, d'absorption et de transmission d'un réseau (les fils étant parallèles au vecteur magnétique), à partir des coefficients A_m et B_m. Comme

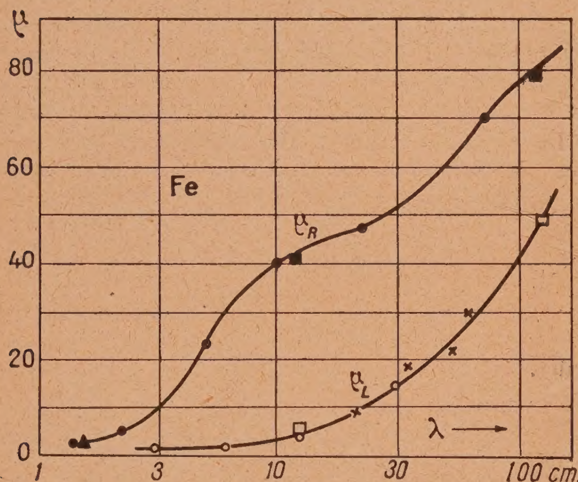


Fig. 2. — Les courbes de V. Arkadiev pour les fils en fer. ● Arkadiev 1912; ○ Arkadiev 1926; × Haog 1932; ■ □ Sänger 1933; ▲ E. Maxwell 1946.

dans le domaine des ondes centimétriques, ces deux coefficients sont définis par les formules (5), on voit que le coefficient de transmission T est beaucoup plus grand que les deux autres coefficients R et A. Pourtant, en se basant sur les courbes expérimentales de μ_R données sur les figures 2 et 3 en fonction de la longueur d'onde, O. Kozinetz montre par un exemple cité ci-dessous, que le coefficient de réflexion d'un réseau ferromagnétique est relativement beaucoup plus grand que celui d'un réseau amagnétique.

Le réseau utilisé par Hertz dans ses expériences était constitué de fils de cuivre de 1 mm de diamètre, distants entre eux de $a = 3$ cm. La longueur d'onde était $\lambda = 60$. De la formule (5), on tire

$$A_m = B_m = x = 85$$

et, d'après la formule (10),

$$u = 6{,}1.10^5, \qquad v = -6{,}1.10^{5},$$

d'où

$$R = 1{,}6.10^{-12}; \qquad A = 1{,}33.10^{-6}; \qquad T = 1 - 1{,}33.10^{-6}.$$

Si le réseau est constitué de fils de fer, et si l'on utilise les courbes de la figure 2, on a pour $\lambda = 60$ cm

$$\mu_R = 70 \quad \text{et} \quad \mu_L = 35$$

et, d'après les formules (6),

$$\mu = 50, \qquad \rho' = 17{,}5, \qquad b = \frac{\rho'}{\mu} = 0{,}35.$$

On obtient alors $x = 250$ et, d'après les formules (5),

$$A_m = 196 \quad \text{et} \quad B_m = 272.$$

D'où

$$R = 4{,}6.10^{-10} \quad \text{et} \quad A = 3{,}5.10^{-5}.$$

Ainsi, le coefficient de réflexion du réseau en fils de fer est 300 fois plus grand que celui d'un réseau en cuivre.

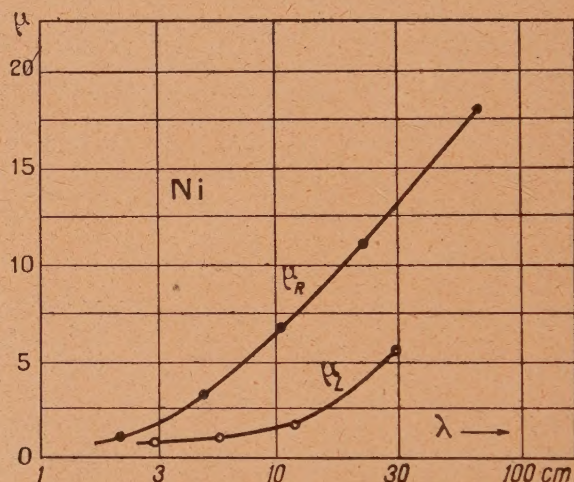


Fig. 3. — Les courbes de V. Arkadiev pour les fils en nickel. ● Arkadiev 1912; ○ Arkadiev 1926.

Malgré les difficultés de telles mesures, l'étude d'un réseau dont les fils peuvent être parallèles, soit au vecteur électrique, soit au vecteur magnétique, présenterait un grand intérêt pour avoir des renseignements au sujet de la structure des domaines de Weiss à la surface d'un ferromagnétique. En effet, par suite du caractère tout particulier de son comportement aux ondes centimétriques, une anisotropie superficielle du ferromagnétique doit avoir une répercussion sensible sur le réseau qu'il compose.

Vérifications expérimentales. — V. Arkadiev est le seul à avoir fait des vérifications expérimentales des formules des réseaux ferromagnétiques. Il les a effectuées en 1912, à l'aide du réseau de Hertz, et du dispositif de mesures indiqué (*fig.* 2). Il a pu ainsi mesurer le coefficient relatif de réflexion $\frac{R}{R_0}$ de la formule (9), dans le domaine d'ondes de 3

à 12 cm, de toute une série de réseaux dont les fils étaient de matériaux et de diamètres divers. Le coefficient relatif de réflexion des réseaux ferromagnétiques a été trouvé plus faible que celui des réseaux amagnétiques : c'est ainsi que pour $\lambda = 10{,}5$; $\frac{R}{R_0}$ est de 93,5 pour 100 pour les fils amagnétiques, de 90 pour 100 pour le nickel, de 82 pour 100 pour l'acier et de 81 pour 100 pour le fer. Pour des fréquences plus élevées, cette différence diminue, et elle tend à disparaître vers $\lambda = 3$ cm. Cela a permis à Arkadiev de déduire, déjà à cette époque, l'allure de la variation de la perméabilité aux ondes centimétriques. Plus tard, en 1926 [10], il a pu utiliser ces résultats pour déterminer la valeur de la perméabilité de fils de fer et de nickel, en se servant de la valeur correspondante de la perméabilié μ_R obtenue par des mesures de pertes le long de fils de Lecher [11]. En effet, le coefficient A_e étant obtenu à partir de μ_R, et les coefficients A et B d'un matériau amagnétique à l'aide des formules (3) pour $b = 0$ et $\mu = 1$, on peut déterminer B_e à partir du rapport entre le coefficient relatif d'un réseau ferromagnétique et celui d'un réseau amagnétique. Ceci permet de calculer μ_L.

Sur les figures 2 et 3, les valeurs de μ_L ainsi trouvées, sont indiquées par des cercles non hachurés. Les cercles hachurés représentent les valeurs de μ_R obtenues par la méthode précitée des fils de Lecher. La figure 2 contient aussi les résultats de mesures de G. Potapenko et R. Sänger [12], ainsi que ceux de Hoag et Jonas [13] obtenus à l'aide d'ondes entretenues par la méthode du fil de Lecher. D'autres mesures effectuées par de nombreux chercheurs (Linmann [14], Glathart [15], Hoag et Gottlieb [16]) à l'aide de méthodes dont un aperçu d'ensemble a été donné récemment par Allanson [17] confirment l'allure des courbes de μ_L et de μ_R des figures 3 et 3, excepté l'inflexion de la courbe de μ_R pour le fer à 20 cm (*fig.* 2) admise par V. Arkadiev et laissé de côté par C. Kittel [18].

Comportement des ferromagnétiques dans le domaine des ondes centimétriques. — Afin de compléter l'étude expérimentale qui précède, nous allons donner un aperçu de l'état actuel des connaissances sur le comportement des ferromagnétiques aux ondes centimétriques.

Il n'y a pas lieu d'énumérer ici les diverses interprétations du comportement des ferromagnétiques dans les champs alternatifs. Rappelons toutefois que l'ancienne théorie des aimants élémentaires énoncée par V. Arkadiev en 1913 [19], a depuis été vérifiée expérimentalement par lui et ses nombreux élèves, dans diverses bandes de fréquence [19*bis*]. Cependant elle n'a pas reçu une interprétation satisfaisante dans le cadre des connaissances actuelle sur les ferromagnétiques.

Mais, si pour interpréter les résultats expérimentaux en basse fréquence, il est nécessaire de déceler une éventuelle hétérogénéité macroscopique [1], il faut tenir compte en haute fréquence de l'hétérogénéité microscopique due aux domaines élémentaires dont les dimensions sont de l'ordre de 10^{-4} à 10^{-3} cm. Déjà, Arkadiev [20] et Becker [21] ont attiré l'attention sur l'influence des dimensions des domaines sur la répartition des courants de Foucault en haute fréquence.

Mais pour comprendre le comportement des ferromagnétiques dans le domaine des ondes centimétriques, il faut noter que la pellicule de pénétration du champ, « la coque fictive » $\left(\delta = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c\lambda}{\sigma\mu}}\right)$ due à l'effet pelliculaire, est inférieure à la dimension d'un domaine de Weiss. Ainsi, pour un fer ayant une conductibilité de 9.10^{16} U. E. S. et une perméabilité de 100, δ est de l'ordre de $10^{-5}\sqrt{\lambda\,(\mathrm{cm})}$ cm.

La théorie de Becker [22] est basée sur l'action des courants de Foucault microscopiques; d'après C. Kittel [18] et K. Polivanov [23], elle n'est pas applicable aux ondes centimétriques car Becker suppose que les courants de Foucault macroscopiques agissent dans un milieu homogène.

Depuis, des modèles de répartition des domaines de Weiss à la surface du ferromagnétique ont été calculés. Dans un travail de Strutt et Knoll de 1940 [24], il a déjà été fait appel à un modèle proposé par G. Heller [2]. Il suppose que la couche superficielle du ferromagnétique est constituée de domaines de Weiss dont la plus grande dimension, ainsi que la direction de l'aimantation sont parallèle à cette surface. Chacun de ces domaines est aimanté à saturation et possède ainsi une perméabilité $\mu = 1$ à l'intérieur. Par contre, la paroi de séparation entre deux domaines possède une perméabilité très élevée et une épaisseur de l'ordre de 30 atomes (10^{-6} cm).

Depuis, K. Polivanov [23] a effectué en 1946, des calculs sur un modèle analogue à celui proposé par G. Heller. Un autre modéle a été calculé à la même époque par C. Kittel [18]. Malgré les différences des modèles et de la méthode de calcul, et malgré les nombreuses simplifications, K. Polivanov, en prenant pour épaisseur du domaine 10^{-4} cm, et C. Kittel en prenant pour cette épaisseur $2{,}5.10^{-4}$ cm, trouvent des courbes théoriques qui ont la même allure que les courbes expérimentales des figures 2 et 3.

(1) *Voir* I. EPELBOÏM [4]. Depuis l'hypothèse d'une répartition non uniforme des propriétés magnétiques a été confirmée par une étude en profondeur de l'état cristallin des rubans ferromagnétiques effectuée aux rayons X au Laboratoire de Minéralogie de la Sorbonne sous la direction de M. le Professeur Wyart [J. Wyart et I. Epelboïm (inédit)].

(2) Malheureusement, les calculs de G. Heller n'ont pas été publiés car il est mort en Allemagne dans un camp de concentration.

L'état de polissage de surface et le changement de composition chimique de la couche superficielle, doivent jouer un grand rôle dans le comportement des ferromagnétiques aux ondes centimétriques. Des mesures récentes de E. Maxwell [18] effectuées aux ondes de 1,25 cm, tout en confirmant les courbes d'Arkadiev de la figure 2 pour l'acier laminé à froid, marquent des variations considérables entre les échantillons préparés par des méthodes différentes. Pour le nickel les valeurs trouvées par E. Maxwell sont plus grandes que celles déduites d'après les courbes de Arkadiev de la figure 3 dont l'allure a été confirmée récemment entre $20^{cm},1$ et $3^{cm},2$ par I. Simon [25].

Aussi la reprise des anciennes mesures à l'aide de procédés nouveaux : lignes coaxiales, guides d'ondes, etc., et l'utilisation de techniques modernes comme celles des rayons X pour l'étude de la structure en profondeur du polissage électrolytique et du microscope électronique pour l'étude de l'état de surface, permettront de calculer avec plus de précision l'influence des courants de Foucault sur les caractéristiques de la perméabilité aux ondes centimétriques.

Le fait que la fréquence de Larmor des spins atomiques des ferromagnétiques se trouve dans le domaine des ondes centimétriques et que la variation de la perméabilité avec la fréquence en est influencée [26], surtout sous l'action d'un champ continu superposé, donne à l'étude de ces courbes un intérêt encore plus grand, et la relie à d'autres problèmes d'actualité [27], [28] et [29].

Conclusion. — La théorie approximative des réseaux amagnétiques peut être généralisée au cas des fils ferromagnétiques, à l'aide de la notion de perméabilité complexe. Les mesures sur des réseaux ferromagnétiques ont permis pour la première fois de déterminer l'allure de la variation de la perméabilité aux ondes centimétriques, variation confirmée par la suite par d'autres méthodes.

Mais le comportement des ferromagnétiques est alors compliqué par suite d'une hétérogénéité inhérente à l'existence des domaines élémentaires. Aussi, la poursuite des mesures sur des matériaux magnétiques par des procédés modernes est susceptible de résoudre divers problèmes, et, entre autres, pourrait apporter des éléments nouveaux à la recherche de la structure réelle des domaines de Weiss.

Manuscrit reçu le 29 mars 1947.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. Gans, *Ann. de Physique*, 1920, **61**, p. 447.
[2] C. Schaefer, *Ann. de Physique*, 1924, **74**, p. 275.
[3] V. Arkadiev, *J. Soc. de Physique russe*, 1913, **45**, p. 312; *Physik Z.*, 1913, **14**, p. 928.
[4] I. Epelboïm, *Thèse*, Paris, 1946; *Rev. gén. Électricité*, 1946, **55**, p. 271 et 310.
[5] I. Epelboïm et M. Fallot, *Rev. Sc.*, 1945, **83**, p. 39.
[6] I. Epelboïm (inédit), *C. R.*. 1947, **225**, p. 535 (référence ajoutée en cours d'impression).
[7] V. Arkadiev, *J. Soc. Physique russe*, 1926, **58**, p. 159; *Ann. de Physique*, 1924, **75**, p. 426.
[8] V. Arkadiev, *Ann. de Physique*, 1914, **45**, p. 133.
[9] O. Kozinetz, Recueil : *Problème de ferromagnétisme et magnétodynamique*, Moscou, 1946, p. 93.
[10] V. Arkadiev, *Ann. de Physique*, 1926, **61**, p. 649; *J. Soc. de Physique russe*, 1926, **58**, p. 159.
[11] V. Arkadiev, *Ann. de Phys.*, 1919, **58**, p. 105.
[12] G. Potapenko et R. Sänger, *Naturw*, 1933, **21**, p. 818.
[13] Hoag et Jonas, *Phys. Rev.*, 1932, **42**, p. 571.
[14] Lindmann, *Z. tech. Physik.*, 1938, **19**, p. 323.
[15] Glathart, *Phys. Rev.*, 1939, **55**, p. 833.
[16] Hoag et Gottlieb, *Phys. Rev*, 1939, **55**, p. 410.
[17] Allanson, *J. E. E.* **I**, 1945, **92**, p. 247.
[18[C. Kittel, *Phys. Rev.*, 1946, **70**, p. 281.
[19[V. Arkadiev, *Phys.*, 1913, **14**, p. 928.
[19 *bis*] V. Arkadiev, *La théorie électromagnétique de la lumière et les travaux du Laboratoire Maxwell de Moscou* 1919-1944, Moscou 1944, et Recueil : *problèmes de ferromagnétisme et de magnétodynamique*, Moscou, 1946, p. 7.
[20] V. Arkadiev, *C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, (Doklady), 1935, **2**, p. 204.
[21] R. Becker, *Z. Tech. Phys.*, 1938, **19**, p. 542.
[22] Becker et Döring, *Ferromagnetismus*, Springer, Berlin, 1939.
[23] K. Polivanov, Recueil : *problèmes de ferromagnétisme et magnétodynamique*, 1946, p. 55.
[24] Strutt et Knoll, *Physica*, 1940, **7**, p. 635.
[25] I. Simon, *Nature*, 1946, **157**, p. 735.
[26] Landau et Effschitz, *Physik Z. U. R. S. S.*, 1935, **8**, p. 153.
[27] J. Griffifhs, *Nature*, 1946, **158**, p. 670.
[28] C. Kittel, *Phys. Rev.*, 1947, **71**, p. 270.
[29] W. Yager et R. Bozorth, *Phys. Rev.*, 1947, **72**, p. 80 (référence ajoutée en cours d'impression).

Le Gérant : Maurice Blondin. 127020 Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1947.